

**UNIVERSIDADE DE TAUBATE  
HENRIQUE DE CAMARGO KOTTKE**

**UMA VISÃO GLOBAL DA DINÂMICA DE  
NEWTON-EULER APLICADA A ROBÔS  
MANIPULADORES**

**Taubaté – SP  
2005**

**UNIVERSIDADE DE TAUBATE  
HENRIQUE DE CAMARGO KOTTKE**

**UMA VISÃO GLOBAL DA DINÂMICA DE  
NEWTON-EULER APLICADA A ROBÔS  
MANIPULADORES**

**Dissertação apresentada para a obtenção de  
Título de Mestre pelo Curso de Engenharia  
Mecânica subárea Automação Industrial e  
Robótica do Departamento de Engenharia  
Mecânica da Universidade de Taubaté.**

**Área de Concentração : ROBÓTICA**

**Orientador: Profº Dr. Giorgio E. O. Giacaglia**

**Taubaté –SP  
2005**

**HENRIQUE DE CAMARGO KOTTKE**  
**UMA VISÃO GLOBAL DA DINÂMICA DE NEWTON-EULER APLICADA A**  
**ROBÔS MANIPULADORES**

**Dissertação apresentada para a obtenção de  
Título de Mestre pelo Curso de Engenharia  
Mecânica subárea Automação Industrial e  
Robótica do Departamento de Engenharia  
Mecânica da Universidade de Taubaté.**

Área de Concentração : ROBÓTICA

**Data:**\_\_\_\_\_

**Resultado:**\_\_\_\_\_

**BANCA EXAMINADORA**

**Prof. Dr. Giorgio E. Oscare Giacaglia Instituição UNITAU**

**Assinatura**\_\_\_\_\_

**Prof. Dr. João Sinohara de Souza Instituição UNITAU**

**Assinatura**\_\_\_\_\_

**Prof. Dr. Carlos Frajuca Instituição CEFET-SP**

**Assinatura**\_\_\_\_\_

Dedico este trabalho a memória de meus pais Geraldo e Olinda, os quais me ensinaram de maneira exemplar os caminhos da minha vida

A minha esposa Rosely e ao meu filho Herbert

## **AGRADECIMENTOS**

**Ao Prof. Dr. Giorgio E. O. Giacaglia, por sua capacidade de orientar e ajudar na estruturação deste trabalho.**

**A todo corpo docente do programa de mestrado desta Universidade.**

**Aos colegas professores do CEFET-SP, os quais auxiliaram nas horas mais difíceis, em especial ao Prof. Chester Contatori, fiel companheiro.**

**Ao CEFET-SP, na pessoa do Sr. Diretor Geral Prof. Dr. Garabed Kenchian, o qual proporcionou a realização da parceria entre o CEFET-SP e a UNITAU**

**Ao Prof. Dr. Augusto Horiguti, pela importante ajuda na formulação deste trabalho**

## **Resumo**

Este trabalho, introduz e desenvolve uma nova formulação do método do Newton -Euler para a dinâmica de multicorpos rígidos aplicada a um robô manipulador. Este formalismo propicia uma maneira para a modelagem do atrito que age nas juntas que conectam cada braço do robô, não limitado por nenhum modelo pré-definido. Algoritmos são apresentados para o controle e a simulação dinâmica de um robô manipulador..

## **Abstract**

This work, introduces and develops a new formalism of Newton - Euler Method for the dynamics of rigid multibodies applied to a robotic manipulator. Such formalism gives a general way for modeling of friction acting in each connection between each arm of the robot, not restricted to any pre assigned friction model. Algorithms are given for the control and dynamic simulation of a robotic manipulator.

## **Sumário**

<b>1. Introdução</b>	<b>8</b>
<b>1.1. Revisão da Literatura</b>	<b>9</b>
<b>1.2. Proposição</b>	<b>12</b>
<b>1.3. Método</b>	<b>13</b>
<b>1.3.1. Forças, Torques e Esforços Agregados</b>	<b>15</b>
<b>1.3.2. Vínculos e Velocidades Virtuais</b>	<b>20</b>
<b>1.3.3. Esforços Mantenedores e Esforços Tangenciais</b>	<b>22</b>
<b>1.3.4. Esforços Externos e Reações Vinculares</b>	<b>27</b>
<b>1.3.5. Reações Perfeitas e Esforços Normais</b>	<b>31</b>
<b>1.3.6. Reações Imperfeitas e Modelagem do Atrito Vincular</b>	<b>35</b>
<b>2. Dinâmica de Robôs Manipuladores</b>	<b>38</b>
<b>2.1. Distribuição de Esforços</b>	<b>39</b>
<b>2.2. Velocidades Virtuais e Esforços Mantenedores</b>	<b>40</b>
<b>2.3. O Isomorfismo Canônico</b>	<b>44</b>
<b>2.4. Decomposição dos Esforços Trocados</b>	<b>49</b>
<b>2.5. O Atrito Vincular nas Articulações</b>	<b>53</b>
<b>2.6. Determinação das Reações Vinculares</b>	<b>58</b>
<b>2.7. Controle de Robôs Manipuladores</b>	<b>60</b>
<b>2.8. Simulação de Robôs Manipuladores</b>	<b>62</b>
<b>3. Resultados</b>	<b>65</b>
<b>4. Discussão</b>	<b>66</b>
<b>5. Conclusão</b>	<b>67</b>
<b>Referências</b>	<b>68</b>



---

KOTTKE, Henrique de Camargo

Uma visão global da dinâmica de Newton-Euler, aplicadas a robôs manipuladores/ Henrique de Camargo Kottke – São Paulo: UNITAU 2005.

Dissertação (mestrado) – UNITAU- Universidade de Taubate, Departamento de Engenharia Mecânica. 2005

Orientador: Prof<sup>o</sup> Dr. Giorgio E. O. Giacaglia  
69 fls.:il.: 30 cm.

Palavra-chave: Robótica, atrito, Newton-Euler I. Giacaglia, Giorgio E.O. II. UNITAU- Universidade de Taubate Departamento de Engenharia Mecânica III. Título

CDD (21) 67042872

---

**Autorizo cópia total ou parcial  
desta obra, apenas para fins de estudo e  
pesquisa, sendo expressamente vedado  
qualquer tipo de reprodução para fins  
comerciais sem prévia autorização  
específica do autor  
Henrique de Camargo Kottke  
Taubate, dezembro 2005**

## 1. Introdução

Modelos dinâmicos utilizados para controlar e simular robôs manipuladores normalmente definem essas máquinas como sistemas mecânicos compostos por um número finito de corpos rígidos ou flexíveis sujeitos a vínculos holônomos.

Este trabalho não trata de braços flexíveis pois visa, de início, estabelecer um formalismo mais apropriado para corpos rígidos, deixando para desenvolvimentos futuros sua extensão a corpos flexíveis.

O objetivo principal é introduzir uma nova abordagem matemática para a aplicação do Método Iterativo de Newton - Euler para a solução das equações dinâmicas de um robô manipulador.

O mesmo formalismo fornece uma melhor maneira para modelar o atrito que age nas juntas de conexão entre cada braço do robô. Normalmente esse atrito é descrito como dependendo apenas das posições e velocidades relativas dos corpos em contato, de acordo com uma lei pré-definida. Tal descrição, entretanto, não é satisfatória em regimes de baixa lubrificação ou numa outra série de situações, onde a força de atrito pode depender de uma forma bastante complexa da força normal entre as superfícies em contato e do estado do sistema.

O formalismo especial aqui desenvolvido utiliza vetores multidimensionais representando o conjunto de braços de um robô. Como resultado, o Método Iterativo de Newton-Euler é aplicado para todas as variáveis dinâmicas em conjunto em vez de

resolver o problema dinâmico global tratando cada parte separadamente. São obtidos assim os momentos e forças resultantes em cada corpo. A seguir é estabelecido um isomorfismo canônico entre esses esforços resultantes e os esforços trocados em cada junta. Deste isomorfismo decorre a reação dissipativa contrária ao movimento de cada junta, de forma que a força ou o torque de atrito é caracterizada.

Toda vez que uma nomenclatura especial é utilizada ela é claramente definida.

Na seção 1.1 é apresentada uma revisão da literatura pertinente a este trabalho. Na seção 1.2 é apresentada a proposta do trabalho onde se indicam sua motivação e o caminho em geral a ser seguido no seu desenvolvimento. Na seção 1.3 é desenvolvida uma metodologia específica para atingir os resultados propostos. Na seção 2 é desenvolvida a dissertação onde se apresenta uma nova forma de tratamento da dinâmica de robôs manipuladores, utilizando a metodologia escrita. Na seção 3 são resumidos os principais resultados obtidos. Na seção 4 é feita uma discussão desses resultados e a seção 5 conclui o trabalho de acordo com os resultados obtidos e a discussão.

### **1.1. Revisão da Literatura**

Nas últimas três décadas foi desenvolvida uma grande quantidade de trabalhos literários em tecnologia e aplicação de manipuladores e de robôs (Schiehlen, 1990,1997 ; Pfeiffer e Gloocker, 1996, ; Schiehlen, Rukgauer e Schirle, 2000) estes trabalhos foram o objeto de diversas reuniões internacionais. Vários aspectos foram discutidos cobrindo

todos os problemas teóricos fundamentais, desenvolvimento de métodos computacionais para a cinemática e dinâmicos de robôs, tópicos especiais associados a aplicações industriais e as novas tecnologias que tratam do projeto e construção de robôs para aplicações específicas. O atrito nos braços flexíveis (Shabana, 1997) foram tratados com a criação de modelos complexos.

O estudo mecânico dos robôs manipuladores é uma aplicação especial de um assunto mais geral que trata da cinemática e dinâmica de multi corpos (Amiruoche 1992; Schiehlen, 1990; Shabana 1989). Um campo de pesquisa e de desenvolvimento intenso, onde o objetivo principal foram as aplicações industriais especiais foi desenvolvido por Nato (2000).

As literaturas mais importantes na década de 80 sobre robôs e fonte importante de estudo nesta pesquisa foram desenvolvidas por ( Lee 1982; Walker e Orin, 1982; Alii Walker e Paul, 1980; Silver, 1982).

A análise dinâmica dos robôs efetuada pelo método iterativo de Newton-Euler foi desenvolvida em detalhes por livros clássicos no assunto (Craig 1986; Schilling, 1990) e num trabalho mais evoluído por (Orion e Alii 1979). O livro de Craig é bem completo, mas a notação usada é de certo modo incomoda, sendo difícil utilizá-lo como referência.

O trabalho escrito por Schiling é mais fácil de entender por utilizar uma notação mais simples, embora tenha utilizado somente o formalismo de Lagrange. A comparação

entre o método de aproximação Lagrangeano e do método de Newton-Euler e discutido em um artigo escrito por Silver (1982).

Os trabalhos que estabeleceram as novas bases para o tratamento matemático da dinâmica de robôs foram publicados há aproximadamente 20 anos, mas ainda são referências imperativas para a mecânica clássica (Abraham e Marsden, 1982; Arnold, 1987; Liebermann e Marle, 1987; Cortizo, 1991). Usando os resultados básicos da geometria diferencial (Cortizo 1991), estabeleceu uma visão matemática rigorosa para a dinâmica de multi corpos. Os princípios básicos neste assunto são encontrados em O'Neil (1997). Uma boa referência para a conexão entre mecanismo clássicos e a geometria diferencial é feita em um artigo do estudo publicado pela Sociedade Matemática Americana (2001). Um trabalho efetuado pelo prof. S. F. Cortizo no Instituto de Matemática da Universidade de São Paulo, é uma fonte de consulta sobre novas maneiras de discussão do problema estabelecida pelo Prof. Giorgio E. O. Giacaglia. (Cortizo, Giacaglia, 1993). Estes trabalhos serviram de base para o desenvolvimento base para o desenvolvimento desta pesquisa. Os trabalhos de dinâmica e controle de robôs encontrados na literatura atual são baseados nas equações de Newton-Euler e no formalismo Lagrangiano. Os livros editados por Eshpaj e por Vidyasagar (1989) e por Sciavicco (2000) são um excelente fontes de consulta. Os tratamentos dados no último (Sciavicco 2000) são baseados em modelos matemáticos avançados e são apropriados como uma literatura da referência. Uma discussão completamente diferente foi desenvolvida por Hollerbach (1980) que construiu um algoritmo recursivo para as equações Lagrangiana de robôs multi corpos. Esta discussão é realmente e a melhor fonte de referência para o estudo em computação numéricas da dinâmica. Métodos

computacionais foram apresentados por diversos autores em uma reunião patrocinada pela Academia de Ciências de Cracovian em 2001. Os métodos numéricos para a dinâmica de multi corpos foram descritos nos detalhes por Eich-Soelnlner e por Führer (1990). Um trabalho básico discutindo o método numérico e a à dinâmica de multi corpos flexíveis baseada em elementos finitos foi desenvolvida em um livro por Geradin e por Cardona (2001). Um método diferente de resolver a dinâmica de manipuladores foi introduzido por Eberhard e por Schiehlen (1998) que estabelecem uma hierarquia para a avaliação das variáveis envolvidas na dinâmica dos manipuladores.

## **1.2. Proposição**

No momento atual, a teoria da dinâmica e o controle dos robôs estão bem estabelecidos, embora a técnica disponível para o projeto real dos manipuladores permaneça com poucas companhias que são responsáveis pela a maioria dos robôs que operam em todos os tipos das atividades, incluindo operações do risco elevado ou atividades nos ambientes não acessíveis aos trabalhadores humanos. A especificação real do projeto de um robô depende essencialmente da consideração de deformações e de vibrações dos braços e de modelar apropriadamente o atrito dos componentes mecânicos. Estas propriedades dependem criticamente da temperatura, da pressão e da umidade ambientais, também na presença eventual de líquidos corrosivos, tornando difícil o desenvolvimento de uma teoria capaz de tratar do todos estes problemas. Mais e mais robôs são construídos para condições bem específicas e bem determinadas.

Neste trabalho foi desenvolvida uma formulação completamente original para a dinâmica de sistemas mecânicos constituídos por corpos rígidos vinculados, inspirada nos resultados e técnicas da geometria diferencial contemporânea, mas que requer, para ser utilizada na solução de problemas específicos, apenas a linguagem matemática da álgebra linear, que é familiar a praticamente todos os pesquisadores da área de tecnologia.

Esta formulação seguiu rigorosamente o princípio que torna os formalismos analíticos tão adequados ao estudo dos sistemas vinculados, a ênfase na descrição do sistema mecânico como um todo, e não de suas partes separadamente. Por outro lado, a incorporação de qualquer modelo vetorial para o atrito é imediata, devido à natureza dos métodos matemáticos empregados.

### 1.3. Método

Nesta seção, são apresentadas as bases conceituais sobre as quais se apoia todo o trabalho de desenvolvimento da dissertação constante da seção 2.

Considere-se, inicialmente, um sistema mecânico constituído por  $n$  corpos rígidos que podem se mover livremente no espaço Euclidiano tridimensional, sem qualquer relação entre si. Fixando um referencial inercial, pode-se representar a velocidade do centro de massa do  $i$ -ésimo corpo por um vetor tridimensional  $\vec{v}_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ), e a velocidade angular do  $i$ -ésimo corpo rígido, em relação ao mesmo referencial, por um vetor tridimensional  $\vec{\omega}_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ).



Usam-se assim, ao todo,  $2n$  vetores tridimensionais para representar as velocidades (lineares e angulares) correspondentes aos  $6n$  graus de liberdade do sistema. Seguindo o princípio de ênfase na descrição do sistema mecânico como um todo, e não de suas partes separadamente, define-se a *velocidade agregada* do sistema como sendo o vetor  $6n$ -dimensional:

$$\vec{v\omega} = (\vec{v}_1, \vec{\omega}_1, \vec{v}_2, \vec{\omega}_2, \dots, \vec{v}_n, \vec{\omega}_n) \quad (1.3.1)$$

Convencionando que as operações lineares sobre estes vetores (soma e multiplicação por escalar) serão feitas componente a componente, constrói-se um espaço vetorial  $\mathbf{V}$  de dimensão  $6n$  sobre escalares reais, que será chamado de *espaço das velocidades agregadas*. Apesar das unidades de medida das velocidades lineares serem diferentes das usadas para velocidades angulares, nunca serão somadas grandezas com unidades diferentes ao operar os vetores agregados componente a componente.

A noção de velocidade agregada será usada concomitantemente com os conceitos de *configuração* e *estado* do sistema mecânico constituído pelos  $n$  corpos rígidos. Esses termos terão aqui o mesmo significado que eles têm na mecânica analítica clássica: uma *configuração* é uma determinada colocação dos  $n$  corpos rígidos no espaço (posição e orientação angular), enquanto um *estado* é definido pela colocação e velocidade dos  $n$  corpos (velocidades lineares e angulares). Assim, cada estado tem uma única configuração subjacente, mas há vários estados distintos associados a uma mesma configuração.

Utilizando a idéia de velocidade agregada, pode-se imaginar cada estado do sistema como um par  $(\mathbf{u}, \overrightarrow{v\omega})$ , onde  $\mathbf{u}$  representa a configuração subjacente a esse estado e  $\overrightarrow{v\omega} \in \mathbf{V}$  representa a velocidade das diversas partes do sistema (isto é, dos  $n$  corpos rígidos). O estado de repouso do sistema na configuração  $\mathbf{u}$  fica assim representado pelo par  $(\mathbf{u}, \overrightarrow{00})$ , onde  $\overrightarrow{00} \in \mathbf{V}$  é a velocidade agregada nula, isto é, o vetor nulo do espaço vetorial  $\mathbf{V}$ .

Esta representação dos estados do sistema mecânico por pares  $(\mathbf{u}, \overrightarrow{v\omega})$  é anterior à introdução de *coordenadas generalizadas* para a descrição da colocação dos corpos no espaço (através das coordenadas dos centros de massa e dos ângulos de Euler, por exemplo), no sentido em que ela não depende dos parâmetros escolhidos, entre os vários possíveis, para realizar essa tarefa. (Da mesma forma como vetores tridimensionais, definidos como objetos geométricos, não devem ser confundidos com sua terna de componentes relativas a uma base vetorial particular). Em outras palavras, ao representar um estado do sistema pelo par  $(\mathbf{u}, \overrightarrow{v\omega})$ , deve-se entender  $\mathbf{u}$  como a configuração subjacente “em si mesma”, e  $\overrightarrow{v\omega} \in \mathbf{V}$  como um objeto geométrico que representa vetorialmente a velocidade do sistema “como um todo”.

### 1.3.1. Forças, Torques e Esforços Agregados

Será chamado *distribuição de esforços* um conjunto de forças (vetoriais) aplicadas em pontos diversos de um corpo rígido (esses conjuntos são também chamados de “sistemas de forças”). Sabe-se da mecânica newtoniana que a influência conjunta dessas

forças sobre o movimento do corpo rígido pode ser completamente descrita um par de vetores da forma  $(\vec{F}, \vec{N})$ , onde  $\vec{F}$  é a *força resultante* (também chamada simplesmente de “resultante”) e  $\vec{N}$  o *torque resultante* da distribuição (também chamado “binário”). Esse torque é sempre relativo a um ponto do espaço, que chamado *pólo* do par  $(\vec{F}, \vec{N})$ .

O par de vetores  $(\vec{F}, \vec{N})$  descreve completamente a influência da distribuição sobre o movimento do corpo rígido no seguinte sentido: duas distribuições distintas que possam ser representadas pelo mesmo par  $(\vec{F}, \vec{N})$ , em relação a um mesmo pólo, provocam exatamente as mesmas acelerações lineares e angulares do corpo rígido, apesar dos esforços internos, que mantêm sua rigidez, serem diferente nos dois casos.

Neste trabalho sobre sistemas mecânicos constituídos por corpos rígidos, não interessam os esforços internos a cada um desses corpos. Assim, considera-se que uma distribuição de esforços aplicada sobre o  $i$ -ésimo corpo desse sistema está completamente descrita pelo par  $(\vec{F}_i, \vec{N}_i)$ , usando sempre como pólo o centro de massa desse corpo ( $i = 1, \dots, n$ ). Um tal conjunto de  $n$  distribuições “simultâneas”, cada uma delas aplicando sobre um dos  $n$  corpos, fica então descrito por  $2n$  vetores tridimensionais. Procurando novamente enfatizar a descrição do sistema mecânico como um todo, e não de suas partes separadamente, define-se o *esforço agregado* sobre o sistema como sendo o vetor  $6n$ -dimensional:

$$\overline{FN} = (\vec{F}_1, \vec{N}_1, \vec{F}_2, \vec{N}_2, \dots, \vec{F}_n, \vec{N}_n) \quad (1.3.1.1)$$

De forma análoga à utilizada para velocidades, construi-se um outro espaço vetorial  $\mathbf{E}$ , também de dimensão  $6n$ , chamado *espaço dos esforços agregados*. Apesar de  $\mathbf{V}$  e  $\mathbf{E}$  terem a mesma dimensão, não faz sentido somar uma velocidade agregada  $\overrightarrow{v\omega} \in \mathbf{V}$  com um esforço agregado  $\overrightarrow{FN} \in \mathbf{E}$ , motivo pelo qual é feita a distinção entre esses dois espaços vetoriais. Deve-se imaginar  $\overrightarrow{FN} \in \mathbf{E}$  como um objeto geométrico que descreve vetorialmente o esforço que atua sobre o sistema “como um todo”, isto é, os esforços que atuam sobre todos os  $n$  corpos que o constituem.

Uma distribuição de esforços aplicados sobre um corpo rígido pode ser decomposta conceitualmente em duas outras, tanto pela divisão do conjunto de suas forças em dois subconjuntos disjuntos (que, unidos, são iguais ao original), quanto pela decomposição vetorial de cada uma dessas forças em duas outras forças (aplicadas sobre o mesmo ponto). Esse procedimento, aplicado a uma distribuição descrita pelo par  $(\vec{F}, \vec{N})$ , gera duas *distribuições componentes* (**A** e **B**) que podem ser descritas por pares  $(\vec{F}_A, \vec{N}_A)$  e  $(\vec{F}_B, \vec{N}_B)$ . Se esses dois pares forem relativos ao mesmo pólo usado para o par  $(\vec{F}, \vec{N})$  então tem-se:

$$\vec{F} = \vec{F}_A + \vec{F}_B \quad (1.3.1.2)$$

e

$$\vec{N} = \vec{N}_A + \vec{N}_B \quad (1.3.1.3)$$

Considere-se novamente um sistema composto por  $n$  corpos rígidos. Se o procedimento acima for aplicado “simultaneamente” a todas as distribuições descritas

pelo esforço agregado  $\overrightarrow{FN}$ , então tem-se uma decomposição correspondente desse vetor no espaço  $\mathbf{E}$ :

$$\overrightarrow{FN} = \overrightarrow{FN_A} + \overrightarrow{FN_B} \quad (1.3.1.4)$$

pois convencionou-se que qualquer distribuição aplicada sobre um dos corpos rígidos que compõe o sistema será sempre descrita pelo par que usa o centro de massa desse corpo como pólo.

A potência  $W$  correspondente a uma distribuição de esforços sobre o corpo rígido em que ela está aplicada também pode ser calculada diretamente a partir do par  $(\vec{F}, \vec{N})$ , desde que sejam conhecidos a velocidade angular  $\vec{\omega}$  do corpo e a velocidade vetorial  $\vec{v}$  do ponto solidário a esse corpo que está sendo usado (instantaneamente) como pólo do par  $(\vec{F}, \vec{N})$ :

$$W = \vec{v} \cdot \vec{F} + \vec{\omega} \cdot \vec{N} \quad (1.3.1.5)$$

Aplicando este resultado ao sistema composto por  $n$  corpos rígidos, conclui-se que a potência das forças e momentos aplicados sobre o  $i$ -ésimo corpo pela distribuição descrita pelo par  $(\vec{F}_i, \vec{N}_i)$  é simplesmente:

$$W_i = \vec{v}_i \cdot \vec{F}_i + \vec{\omega}_i \cdot \vec{N}_i, \quad (1.3.1.6)$$

pois  $\vec{v}_i$  é exatamente a velocidade do seu centro de massa, que é o pólo do par

$$(\vec{F}_i, \vec{N}_i) \quad (i=1, \dots, n).$$

Buscando novamente a ênfase na descrição do sistema como um todo, define-se *produto escalar* entre os vetores agregados dos espaços  $\mathbf{V}$  e  $\mathbf{E}$  por:

$$\vec{v\omega} \cdot \overrightarrow{FN} = \sum_{i=1}^n (\vec{v}_i \cdot \vec{F}_i + \vec{\omega}_i \cdot \vec{N}_i) \quad (1.3.1.7)$$

Assim, pode-se calcular a potência  $W = W_1 + \dots + W_n$  das forças e momentos aplicados instantaneamente sobre o sistema pelo esforço  $\overrightarrow{FN}$  (quando sua velocidade é  $\vec{v\omega}$ ) fazendo simplesmente o produto escalar desses dois vetores agregados:

$$W = \vec{v\omega} \cdot \overrightarrow{FN} \quad (1.3.1.8)$$

Este “produto escalar” não pode ser calculado entre duas velocidades agregadas, pois estaríamos somando grandezas medidas com unidades diferentes, o que não teria qualquer significado físico. O mesmo vale para esforços agregados, de forma que apenas será feito este produto escalar entre dois vetores agregados de um mesmo tipo. Essa restrição tem uma consequência importante: não pode-se definir o “módulo” de vetores agregados, como é feito usualmente com os vetores tridimensionais.

### 1.3. 2. Vínculos e Velocidades Virtuais

Considere-se agora um *vínculo* sobre o sistema mecânico composto pelos  $n$  corpos rígidos. O termo “vínculo” será utilizado aqui exatamente com o mesmo significado que ele tem na mecânica analítica clássica: uma restrição imposta sobre os estados possíveis do sistema composto pelos  $n$  corpos rígidos, que reduz seu número de *graus de liberdade* de  $6n$  para  $l < 6n$ . Aqui  $l$  é o *número de graus de liberdade do sistema vinculado*.

As definições e resultados a seguir são válidos tanto para os *vínculos holônomos* quanto para os *vínculos não-holônomos bilaterais* estudados na mecânica analítica clássica. No primeiro caso, a restrição cinemática pode ser imposta diretamente sobre as configurações do sistema, isto é, algumas das configurações  $\mathbf{u}$  do sistema não vinculado considerado até aqui são admitidas pelo vínculo, enquanto outras não são. Representam-se genericamente as configurações “admitidas” pela letra  $\mathbf{q}$ , chamadas de *configurações vinculadas* ou *configurações dos sistema vinculado*.

No caso dos vínculos não holônomos (bilaterais) esta distinção não se aplica, pois a restrição cinemática é aplicada sobre os estados do sistema não vinculado de tal forma que é impossível reduzi-la a uma condição sobre suas configurações. Entretanto, representa-se uma configuração genérica do sistema vinculado sempre pela letra  $\mathbf{q}$ , em oposição à letra  $\mathbf{u}$  utilizada na seção anterior para configurações do sistema não vinculado. Essa distinção é irrelevante caso dos vínculos não holônomos, para os quais as duas letras têm o mesmo significado.

Para cada configuração  $\mathbf{q}$  do sistema vinculado, tem-se algumas combinações de velocidades lineares  $\vec{v}_i$  e angulares  $\vec{\omega}_i$  que “respeitam” a restrição vincular, e outras que não o fazem. Diz-se que um vetor velocidade agregada  $\vec{v\omega} \in \mathbf{E}$  é uma velocidade virtual associada “a configuração  $\mathbf{q}$  quando suas componentes tridimensionais formarem uma combinação admitida pelo vínculo para essa configuração  $\mathbf{q}$ . Esse é o sentido do termo “velocidade virtual” na terminologia tradicional da mecânica analítica clássica.

Entretanto, considerá-lo como um vetor agregado permite observar que:

*Para qualquer configuração  $\mathbf{q}$  do sistema vinculado, as velocidades virtuais associadas a  $\mathbf{q}$  formam um subespaço vetorial  $\mathbf{V}_{\mathbf{q}}$  do espaço  $\mathbf{V}$  das velocidades agregadas. A dimensão de  $\mathbf{V}_{\mathbf{q}} \subset \mathbf{V}$  é igual ao número de graus de liberdade do sistema vinculado.*

A notação  $\mathbf{V}_{\mathbf{q}}$  procura indicar que esse subespaço depende da configuração  $\mathbf{q}$ , isto é, para duas configurações distintas do sistema vinculado tem-se, em geral, subespaços distintos de  $\mathbf{V}$  representando as velocidades virtuais correspondentes. As dimensões desses subespaços  $\mathbf{V}_{\mathbf{q}} \subset \mathbf{V}$ , porém, são sempre iguais entre si, pois coincidem com o número de graus de liberdade dos sistema vinculado. Por outro lado, não existem velocidades virtuais no subespaço  $\mathbf{V}_{\mathbf{u}}$  associado às configurações  $\mathbf{u}$  que desrespeitam o vínculo.



Pelo resultado acima, pode-se imaginar cada estado vinculado como um par  $(\mathbf{q}, \vec{v\omega})$ , onde  $\mathbf{q}$  representa a configuração subjacente a esse estado e  $\mathbf{V}_{\mathbf{q}}$  a velocidade virtual associada a ele. O estado de repouso em uma configuração  $\mathbf{q}$  do sistema vinculado, representado pelo par  $(\mathbf{q}, \vec{00})$ , é sempre um estado do próprio sistema vinculado, pois o vetor nulo  $\mathbf{V}$  sempre pertence a qualquer subespaço vetorial de  $\mathbf{V}$ . Entretanto, um par  $(\mathbf{q}, \vec{v\omega})$  com  $\vec{v\omega} \notin \mathbf{V}_{\mathbf{q}}$  não é compatível com o vínculo, isto é, não corresponde a um estado do sistema vinculado, mesmo que a configuração  $\mathbf{q}$  seja admitida por esse vínculo. Nesse caso, o sistema está instantaneamente em uma configuração admitida, mas suas diversas partes têm velocidades que o levarão, nos instantes seguintes, a configurações compatíveis com a restrição vincular.

A representação acima para os estados do sistema vinculado como pares  $(\mathbf{q}, \vec{v\omega})$ , com  $\vec{v\omega} \in \mathbf{V}_{\mathbf{q}}$ , é anterior à introdução de coordenadas generalizadas para a descrição do vínculo, no sentido em que ela não depende do conjunto particular escolhido, entre os vários possíveis, para realizar essa tarefa.

### 1.3. 3. Esforços Mantenedores e Esforços Tangenciais

Considerem-se agora os esforços aplicados sobre um sistema mecânico composto por  $n$  corpos rígidos vinculados. O termo “esforço” deve ser entendido aqui e em todo este trabalho segundo o ponto de vista estabelecido na seção 1.3.1. Uma distribuição de esforços aplicada sobre um corpo rígido fica completamente descrita pelo par força-torque

resultantes. Portanto, um conjunto de  $n$  distribuições, cada uma delas aplicada sobre um dos corpos, fica descrita por um vetor agregado  $\overrightarrow{FN} \in \mathbf{E}$ .

Algumas combinações de esforços aplicados sobre os  $n$  corpos rígidos fazem com que o sistema permaneça respeitando o vínculo ao qual está sujeito, enquanto outras acarretam o “rompimento” desse vínculo. Se os esforços *externos* aplicados sobre o sistema não formarem uma dessas combinações que mantêm os corpos vinculados, então aparecerão *reações vinculares* (esforços trocados entre as partes que compõem o sistema) que, somadas às *ações externas*, resultam em uma das combinações *mantenedoras* do vínculo. Uma discussão detalhada desse processo envolve o atrito associado às reações vinculares e será feita no desenvolvimento da seção 2 deste trabalho. Aqui descrevem-se combinações resultantes que preservam o vínculo, sem nos preocupar com a natureza desses esforços.

Foi visto na seção anterior que um estado qualquer do sistema vinculado pode ser representado por um par  $(\mathbf{q}, \overrightarrow{v\omega})$ . Diz-se que um esforço agregado  $\overrightarrow{FN} \in \mathbf{E}$  mantém o estado  $(\mathbf{q}, \overrightarrow{v\omega})$  vinculado, ou que  $\overrightarrow{FN} \in \mathbf{E}$  é um esforço *mantenedor* do estado  $(\mathbf{q}, \overrightarrow{v\omega})$ , quando suas componentes tridimensionais  $(\vec{F}_i, \vec{N}_i)$  formarem uma combinação de forças e torques resultantes ( $i = 1, \dots, n$ ) que, aplicados sobre os  $n$  corpos rígidos no estado  $(\mathbf{q}, \overrightarrow{v\omega})$ , provoquem acelerações lineares e angulares tais que o sistema permanece respeitando o vínculo ao qual está sujeito.

Para qualquer estado  $(\mathbf{q}, \overrightarrow{v\omega})$ , vale a seguinte propriedade:

*Os esforços mantenedores do estado  $(\mathbf{q}, \overrightarrow{v\omega})$  formam um subespaço afim  $\mathbf{M}_{\mathbf{q}}(\overrightarrow{v\omega})$  do espaço  $\mathbf{E}$  dos esforços agregados. A dimensão de  $\mathbf{M}_{\mathbf{q}}(\overrightarrow{v\omega}) \subset \mathbf{E}$  é igual ao número de graus de liberdade do sistema vinculado.*

É importante lembrar que um subespaço afim de um espaço vetorial é qualquer subconjunto que possa ser obtido por uma translação de um subespaço vetorial.

A notação  $\mathbf{M}_{\mathbf{q}}(\overrightarrow{v\omega})$  procura indicar que esse subespaço depende tanto da configuração  $\mathbf{q}$  do sistema vinculado quanto da velocidade virtual  $\overrightarrow{v\omega} \in \mathbf{V}_{\mathbf{q}}$ , isto é, se dois pares diferem pela configuração  $\mathbf{q}$  ou pelo vetor  $\overrightarrow{v\omega}$  então tem-se, em geral, subespaços distintos de  $\mathbf{E}$  representando os esforços mantenedores desses estados. As dimensões desses subespaços  $\mathbf{M}_{\mathbf{q}}(\overrightarrow{v\omega}) \subset \mathbf{E}$ , porém, são sempre iguais entre si, pois coincidem com o número de graus de liberdade do sistema vinculado.

Assim, dada uma configuração  $\mathbf{q}$  do sistema vinculado, tem-se um subespaço afim  $\mathbf{M}_{\mathbf{q}}(\overrightarrow{v\omega}) \subset \mathbf{E}$  associado a cada velocidade virtual  $\overrightarrow{v\omega} \in \mathbf{V}_{\mathbf{q}}$ . Mas não existem esforços mantenedores nem subespaços  $\mathbf{M}_{\mathbf{q}}(\overrightarrow{v\omega})$  associados aos pares  $(\mathbf{q}, \overrightarrow{v\omega})$  com  $\overrightarrow{v\omega} \notin \mathbf{V}_{\mathbf{q}}$ , pois tais pares não representam estados do sistema vinculado. Pelo mesmo motivo, e com ainda mais razão, não existem esforços mantenedores nem subespaços  $\mathbf{M}_{\mathbf{u}}(\overrightarrow{v\omega})$  associados às configurações  $\mathbf{u}$  que desrespeitam o vínculo.

Quando o sistema está no estado vinculado  $(\mathbf{q}, \overrightarrow{v\omega})$ , a aplicação de qualquer esforço agregado  $\overrightarrow{FN} \in \mathbf{M}_{\mathbf{q}}(\overrightarrow{v\omega})$  provoca acelerações lineares e angulares dos  $n$  corpos rígidos tais que o sistema permanece respeitando o vínculo ao qual está sujeito. Por outro lado, a aplicação de qualquer esforço agregado  $\overrightarrow{FN} \notin \mathbf{M}_{\mathbf{q}}(\overrightarrow{v\omega})$  provoca acelerações nos corpos que levam o sistema, nos seguintes, a estados incompatíveis com a restrição vincular.

Em um sistema mecânico composto por  $n$  corpos rígidos vinculados, tem-se a seguinte propriedade:

*Para qualquer configuração  $\mathbf{q}$ , os subespaços  $\mathbf{M}_{\mathbf{q}}(\overrightarrow{v\omega}) \subset \mathbf{E}$  associados às diferentes velocidades virtuais  $\overrightarrow{v\omega} \in \mathbf{V}_{\mathbf{q}}$  de  $\mathbf{q}$  são todos paralelos entre si. Além disso, se  $\overrightarrow{FN} \in \mathbf{M}_{\mathbf{q}}(\overrightarrow{v\omega})$  então  $\lambda^2 \overrightarrow{FN} \in \mathbf{M}_{\mathbf{q}}(\lambda \overrightarrow{v\omega})$ , para qualquer escalar  $\lambda$ .*

Este resultado mostra que a orientação do subespaço  $\mathbf{M}_{\mathbf{q}}(\overrightarrow{v\omega})$  dentro de  $\mathbf{E}$  depende apenas da configuração  $\mathbf{q}$  do sistema vinculado, e não da velocidade virtual  $\overrightarrow{v\omega} \in \mathbf{V}_{\mathbf{q}}$ . Além disso, o afastamento entre esse subespaço e o vetor nulo  $\overrightarrow{00} \in \mathbf{E}$  depende quadraticamente de  $\overrightarrow{v\omega}$ . Deve ser lembrado que não há uma noção quantitativa de distância em  $\mathbf{E}$ , nem de “módulo” dos vetores de  $\mathbf{V}$ , daí a necessidade de serem usadas apenas operações lineares do espaço vetorial  $\mathbf{E}$  (multiplicação pelo escalar  $\lambda$ ) no enunciado acima.

São corolários da propriedade acima:

*Para qualquer velocidade virtual  $\vec{v}\vec{\omega} \in \mathbf{V}_{\mathbf{q}}$ , tem-se  $\mathbf{M}_{\mathbf{q}}(-\vec{v}\vec{\omega}) = \mathbf{M}_{\mathbf{q}}(\vec{v}\vec{\omega})$ .*

*Para qualquer configuração  $\mathbf{q}$ , o subespaço  $\mathbf{M}_{\mathbf{q}}(\vec{00}) \subset \mathbf{E}$  passa pelo vetor nulo:*

*$\vec{00} \in \mathbf{M}_{\mathbf{q}}(\vec{00})$ . Portanto  $\mathbf{M}_{\mathbf{q}}(\vec{00})$  é sempre um subespaço vetorial de  $\mathbf{E}$ .*

Este último resultado leva a um conceito que será importante na discussão do processo de aparecimento das reações vinculares: diz-se que um esforço  $\vec{FN} \in \mathbf{E}$  é *tangencial* ao vínculo em uma configuração  $\mathbf{q}$  se suas componentes tridimensionais  $(\vec{F}_i, \vec{N}_i)$  formarem uma combinação de forças e torques resultantes ( $i = 1, \dots, n$ ) que, aplicada sobre o estado de repouso (instantâneo) nessa configuração, provoca acelerações lineares e angulares dos  $n$  corpos rígidos tais que o sistema inicia um movimento que respeita o vínculo ao qual está sujeito. Em outras palavras, os esforços tangenciais ao vínculo em uma configuração  $\mathbf{q}$  são os esforços mantenedores do estado de repouso  $(\mathbf{q}, \vec{00})$  nessa configuração.

Nestes termos, o segundo corolário acima estabelece que os esforços tangenciais formam um subespaço afim de  $\mathbf{E}$  que passa pelo vetor nulo, ou seja,  $\mathbf{M}_{\mathbf{q}}(\vec{00})$  é um subespaço vetorial de  $\mathbf{E}$ . Isso é intuitivamente claro, pois, se aplicarmos sobre cada um dos corpos em repouso, uma distribuição de esforços que se anula internamente (força e

torque resultante nulos), então eles permanecem em repouso nessa mesma configuração do sistema, e portanto o vínculo é mantido.

#### 1.3.4. Esforços Externos e Reações Vinculares

Discute-se, agora, o processo de surgimento das reações vinculares com o auxílio dos conceitos introduzidos acima.

Os  $n$  corpos rígidos que compõem o sistema estão submetidos, em cada instante, a esforços *externos*, isto é, que não resultam da presença do vínculo (forças de gravidade, por exemplo). Pode ser descrita a distribuição de todos os esforços externos aplicados sobre o  $i$ -ésimo corpo por um par  $(\vec{F}_i^{ext}, \vec{N}_i^{ext})$ , tomando-se como pólo o seu centro de massa ( $i=1, \dots, n$ ), como convencionado na seção 1.3.2.

Tem-se assim, ao todo,  $2n$  vetores tridimensionais descrevendo os esforços externos que atuam sobre os  $n$  corpos. Agregam-se (no sentido da definição deste trabalho) agora esses  $2n$  vetores tridimensionais e define-se o esforço externo agregado  $\overrightarrow{FN}_{ext} \in \mathbf{E}$  que atua sobre o sistema por:

$$\overrightarrow{FN}_{ext} = (\vec{F}_{1i}^{ext}, \vec{N}_1^{ext}, \vec{F}_2^{ext}, \vec{N}_2^{ext}, \dots, \vec{F}_n^{ext}, \vec{N}_n^{ext}). \quad (1.3.4.1)$$

Se estes esforços formarem uma combinação que, quando aplicada sobre um estado  $(\mathbf{q}, \overrightarrow{v\omega})$ , provoca acelerações lineares e angulares dos  $n$  corpos rígidos tais que o

sistema permanece respeitando o vínculo ao qual está sujeito, então  $\overrightarrow{FN}_{ext} \in \mathbf{M}_{\mathbf{q}}(\overrightarrow{v\omega})$ , isto é,  $\overrightarrow{FN}_{ext} \in \mathbf{E}$ , será um esforço mantenedor do estado  $(\mathbf{q}, \overrightarrow{v\omega})$ . Por outro lado, se  $\overrightarrow{FN}_{ext} \notin \mathbf{M}_{\mathbf{q}}(\overrightarrow{v\omega})$ , então os esforços externos formam uma combinação que não manteria sozinha os corpos vinculados, quando aplicada sobre o estado  $(\mathbf{q}, \overrightarrow{v\omega})$ .

As *reações vinculares* são esforços trocados entre as partes que compõem o sistema e que, somadas às *ações externas*, resultam necessariamente em uma das combinações mantenedoras do vínculo. O surgimento dessas reações decorre da resistência das estruturas físicas que sustentam o vínculo, por um processo complexo, que envolve também o atrito entre as partes em contato.

Pode ser visualizado geometricamente este processo de surgimento das reações vinculares no espaço dos esforços agregados da seguinte forma: quando um esforço externo  $\overrightarrow{FN}_{ext} \in \mathbf{E}$  for aplicado sobre o sistema, aparecerá sempre alguma *reação vincular* agregada  $\overrightarrow{FN}_{vin} \in \mathbf{E}$  tal que a soma  $\overrightarrow{FN}_{ext} + \overrightarrow{FN}_{vin}$  pertença ao subespaço  $\mathbf{M}_{\mathbf{q}}(\overrightarrow{v\omega})$ . Ou seja, a reação vincular é um esforço agregado  $\overrightarrow{FN}_{vin} \in \mathbf{E}$  que, somando à ação externa  $\overrightarrow{FN}_{ext} \in \mathbf{E}$ , resulta em um esforço mantenedor do vínculo.

A conveniência desta visualização fica evidente quando se compara sua clareza e simplicidade com o conjunto das grandezas vetoriais da mecânica newtoniana que estão agregadas na reação vincular  $\overrightarrow{FN}_{vin} \in \mathbf{E}$ :

$$\overrightarrow{FN}_{vin} = (\vec{F}_{1i}^{vin}, \vec{N}_1^{vin}, \vec{F}_2^{vin}, \vec{N}_2^{vin}, \dots, \vec{F}_n^{vin}, \vec{N}_n^{vin}), \quad (1.3.4.2)$$

onde  $(\vec{F}_i^{vin}, \vec{N}_i^{vin})$  é o par de vetores tridimensionais que descreve (conforme a seção 1.3.2) a distribuição de todos os esforços vinculares aplicados sobre o  $i$ -ésimo corpo rígido, tomando-se como pólo o seu centro de massa ( $i = 1, \dots, n$ ).

Se for definido o *esforço resultante agregado*  $\overrightarrow{FN}_{res} \in \mathbf{E}$  por:

$$\overrightarrow{FN}_{res} = \overrightarrow{FN}_{ext} + \overrightarrow{FN}_{vin}, \quad (1.3.4.3)$$

então resulta que:

$$\overrightarrow{FN}_{res} = (\vec{F}_{1i}^{res}, \vec{N}_1^{res}, \vec{F}_2^{res}, \vec{N}_2^{res}, \dots, \vec{F}_n^{res}, \vec{N}_n^{res}), \quad (1.3.4.4)$$

onde:

$$\begin{cases} \vec{F}_i^{res} = \vec{F}_i^{ext} + \vec{F}_i^{vin} \\ \vec{N}_i^{res} = \vec{N}_i^{ext} + \vec{N}_i^{vin} \end{cases} \quad (i = 1, \dots, n)$$

É claro então que  $(\vec{F}_i^{res}, \vec{N}_i^{res})$  é exatamente o par de vetores tridimensionais que descreve a distribuição de todos os esforços (vinculares e externos) aplicados sobre o  $i$ -ésimo corpo rígido, tomando-se como pólo o seu centro de massa ( $i = 1, \dots, n$ ).

É importante interpretar corretamente as equações acima: elas representam uma *decomposição conceitual* da distribuição de todos os esforços aplicados sobre o  $i$ -ésimo corpo rígido (conforme discutido na seção 1.3.2) em duas outras: uma de esforços



externos e outra de esforços vinculares. A relação entre os vetores força-torque que representam essas três distribuições é simples porque esses três pares são relativos a um mesmo pólo: o centro de massa do corpo correspondente. Além disso, a decomposição estendeu-se aos esforços agregados do espaço  $\mathbf{E}$  porque foi aplicada simultaneamente para todos os  $n$  corpos que constituem o sistema mecânico.

Para cada esforço externo  $\overrightarrow{FN}_{ext} \in \mathbf{E}$ , existem vários vetores agregados distintos em  $\mathbf{E}$  que, somados a  $\overrightarrow{FN}_{ext}$ , resultam em um vetor mantenedor do estado  $(\mathbf{q}, \overrightarrow{v\omega})$ , pois  $\mathbf{M}_{\mathbf{q}}(\overrightarrow{v\omega})$  é um subespaço afim  $l$ -dimensional de  $\mathbf{E}$  ( $l$  é o número de graus de liberdade do sistema vinculado). Todos esses vetores são igualmente eficientes como reação visando a manutenção do vínculo. A diferença entre duas reações vinculares possíveis para uma mesma ação externa  $\overrightarrow{FN}_{ext}$  é sempre um esforço tangencial ao vínculo, isto é, um vetor do subespaço  $\mathbf{M}_{\mathbf{q}}(\overrightarrow{00})$ . Essa indeterminação da reação vincular será usada mais tarde para representarmos as diferentes condições de atrito associadas às estruturas físicas que mantêm o vínculo (seção 2). Considere-se antes a discussão do caso clássico das reações vinculares na ausência de qualquer forma de atrito.

### 1. 3. 5. Reações Perfeitas e Esforços Normais

O formalismo tradicional da mecânica analítica clássica especifica as *reações vinculares perfeitas* usando conjuntamente o “Princípio de D’Alembert” e o “Princípio das Velocidades Virtuais”, que podem ser condensados em um único enunciado:

*As reações vinculares (perfeitas) não realizam trabalho, para qualquer velocidade virtual do sistema mecânico vinculado.*

Um esforço agregado  $\overline{FN} \in \mathbf{E}$  aplicado sobre o sistema corresponde a uma potência igual a  $\overline{v\omega} \cdot \overline{FN}$ , onde  $\overline{v\omega} \in \mathbf{V}$  é a velocidade agregada corrente. Será dito que  $\overline{FN} \in \mathbf{E}$  é um *esforço normal* ao vínculo na configuração  $\mathbf{q}$  quando esse vetor *não realizar trabalho sobre o sistema, para qualquer velocidade virtual associada a essa configuração*, ou seja, quando  $\overline{v\omega} \cdot \overline{FN} = 0$  para qualquer  $\overline{v\omega} \in \mathbf{V}_{\mathbf{q}}$ . Definir os esforços normais como vetores agregados leva ao seguinte resultado:

*Os esforços normais ao vínculo em uma configuração  $\mathbf{q}$  formam um subespaço vetorial  $E_q^\perp$  do espaço  $\mathbf{E}$  dos esforços agregados. A dimensão de  $E_q^\perp \subset \mathbf{E}$  é igual à diferença entre  $6n$  e o número de graus de liberdade do sistema vinculado.*

Tem-se assim, para cada configuração  $\mathbf{q}$  de um sistema mecânico constituído por  $n$  corpos rígidos vinculados, dois subespaços vetoriais do espaço  $\mathbf{E}$  dos esforços agregados: o subespaço  $E_q^\perp \subset \mathbf{E}$  dos esforços normais ao vínculo em  $\mathbf{q}$ , e o subespaço  $\mathbf{M}_{\mathbf{q}}(\overline{00}) \subset \mathbf{E}$  dos esforços tangenciais ao vínculo em  $\mathbf{q}$ , que é representado simplesmente por  $E_q^\parallel$ . A soma das dimensões desses dois subespaços é sempre igual a  $6n$ , que é a dimensão do próprio  $\mathbf{E}$ . Além disso, tem-se que:

Para qualquer configuração  $\mathbf{q}$  do sistema vinculado, os subespaços  $E_q^{\parallel}$  e  $E_q^{\perp}$  são transversais entre si, isto é, a interseção entre eles é o subespaço nulo. Portanto, podemos decompor  $\mathbf{E}$  como soma direta desses subespaços:

$$E = E_q^{\parallel} \oplus E_q^{\perp}, \quad (1.3.5.1)$$

para qualquer configuração  $\mathbf{q}$  do sistema vinculado.

Isto significa que, dada uma configuração  $\mathbf{q}$  do sistema vinculado, todo vetor agregado  $\overrightarrow{FN} \in \mathbf{E}$  pode ser escrito como a soma de um esforço normal com um tangencial, e que, além disso, essa decomposição é única. Em outras palavras, para cada  $\overrightarrow{FN} \in \mathbf{E}$ , existe um e um único par  $(\overrightarrow{FN}^{\parallel}, \overrightarrow{FN}^{\perp})$  tal que:

$$\overrightarrow{FN} = \overrightarrow{FN}^{\parallel} + \overrightarrow{FN}^{\perp}, \quad (1.3.5.2)$$

com  $\overrightarrow{FN}^{\parallel} \in E_q^{\parallel}$  e  $\overrightarrow{FN}^{\perp} \in E_q^{\perp}$ .

Essa decomposição é relativa apenas à configuração  $\mathbf{q}$  do sistema vinculado, não dependendo de sua velocidade virtual  $\overrightarrow{v\omega} \in \mathbf{V}_q$ .

Como  $E_q^\perp$  é transversal a  $E_q^\parallel = \mathbf{M}_q(\vec{00})$ , e os subespaços  $\mathbf{M}_q(\vec{v\omega})$  associados a uma mesma configuração  $\mathbf{q}$  são todos paralelos entre si, tem-se que:

*Para cada velocidade virtual  $\vec{v\omega} \in \mathbf{V}_q$  do sistema, existe um e um único esforço normal ao vínculo em  $\mathbf{q}$  que mantém o estado  $(\mathbf{q}, \vec{v\omega})$  vinculado. Ou seja, para cada  $\vec{v\omega} \in \mathbf{V}_q$ , existe um e um único vetor  $\vec{FN}_* \in \mathbf{E}$  que pertence, ao mesmo tempo, aos subespaços  $\mathbf{M}_q(\vec{v\omega})$  e  $E_q^\perp$ .*

O vetor  $\vec{FN}_* \in \mathbf{E}$ , definido pelo resultado acima, será chamado de *esforço mantenedor-normal* do estado  $(\mathbf{q}, \vec{v\omega})$ . Tem-se assim a seguinte caracterização do subespaço dos esforços mantenedores.

*Uma condição necessária e suficiente para um vetor qualquer  $\vec{FN} \in \mathbf{E}$  pertencer a  $\mathbf{M}_q(\vec{v\omega})$  é que  $\vec{FN}^\perp = \vec{FN}_*$ .*

Então dois esforços mantenedores de um mesmo estado do sistema vinculado diferem apenas quanto à componente tangencial.

O formalismo tradicional da mecânica analítica clássica usa o princípio de D'Alembert e o Princípio das Velocidades Virtuais para especificar as reações vinculares perfeitas. O resultado seguinte afirma que sempre existe uma tal reação, qualquer que seja

esforço externo aplicado sobre o sistema, e que, além disso, existe apenas uma reação perfeita a cada esforço externo:

Seja  $(\mathbf{q}, \overrightarrow{v\omega})$  um estado qualquer de um sistema mecânico vinculado. Para cada esforço agregado  $\overrightarrow{FN}_{ext} \in \mathbf{E}$ , existe um e um único  $\overrightarrow{FN}_{vin} \in \mathbf{E}$  tal que:

$$(i) \quad \overrightarrow{FN}_{ext} + \overrightarrow{FN}_{vin} \in \mathbf{M}_{\mathbf{q}}(\overrightarrow{v\omega}); \quad (1.3.5.3)$$

e

$$(ii) \quad \overrightarrow{FN}_{vin} \in E_q^\perp. \quad (1.3.5.4)$$

Em outras palavras, para cada esforço externo existe uma e uma única reação vincular perfeita do sistema vinculado.

Para demonstrar esta afirmação, é deduzida uma fórmula para a reação vincular perfeita em termos do esforço mantenedor-normal  $\overrightarrow{FN}_*$  do estado  $(\mathbf{q}, \overrightarrow{v\omega})$ , e da componente normal do esforço externo  $\overrightarrow{FN}_{ext}$  aplicado sobre o sistema.

Tomando as componentes normais na equação:

$$\overrightarrow{FN}_{res} = \overrightarrow{FN}_{ext} + \overrightarrow{FN}_{vin}, \quad (1.3.5.5)$$

obtém-se que:

$$\overrightarrow{FN}_{res}^\perp = \overrightarrow{FN}_{ext}^\perp + \overrightarrow{FN}_{vin}^\perp \quad (1.3.5.6)$$

Para qualquer reação vincular, tem-se que  $\overrightarrow{FN}_{res} \in \mathbf{M}_{\mathbf{q}}(\overrightarrow{v\omega})$ , logo  $\overrightarrow{FN}_{res}^{\perp} = \overrightarrow{FN}_{*}$ , e portanto:

$$\overrightarrow{FN}_{vin}^{\perp} = \overrightarrow{FN}_{*} - \overrightarrow{FN}_{ext}^{\perp} \quad (1.3.5.7)$$

Além disso, para a reação vincular perfeita vale que  $\overrightarrow{FN}_{vin}^{\perp} = \overrightarrow{FN}_{vin}$ , pois  $\overrightarrow{FN}_{vin}$  é um esforço normal ao vínculo. Conclui-se então que:

$$\overrightarrow{FN}_{vin} = \overrightarrow{FN}_{*} - \overrightarrow{FN}_{ext}^{\perp},$$

o que prova a existência e a unicidade do vetor  $\overrightarrow{FN}_{vin} \in \mathbf{E}$  nas condições acima.

Pode-se utilizar essa fórmula para obter alguns resultados sobre a reação vincular perfeita: se  $\overrightarrow{FN}_{ext} = \overrightarrow{00}$ , então  $\overrightarrow{FN}_{vin} = \overrightarrow{FN}_{*}$ , o que permite interpretar o esforço mantenedor-normal como *o vetor agregado que representa a reação vincular perfeita correspondente à ausência de esforço externo aplicado sobre os sistema*. Além disso, se  $\overrightarrow{FN}_{ext}$  mantiver o estado  $(\mathbf{q}, \overrightarrow{v\omega})$  vinculado (isto é, se  $\overrightarrow{FN}_{ext}^{\perp} = \overrightarrow{FN}_{*}$ ), então não haverá reação vincular:  $\overrightarrow{FN}_{vin} = \overrightarrow{00}$ . Assim *a reação perfeita aparece apenas quando sua presença é indispensável à manutenção do vínculo*.

### 1.3.6. Reações Imperfeitas e Modelagem do Atrito Vincular

Foi visto acima como o Princípio de D'Alembert especifica um dos vários vetores  $\overrightarrow{FN}_{vin}$  que, somados a  $\overrightarrow{FN}_{ext}$ , resultam em um esforço mantenedor do vínculo. A reação vincular perfeita assim especificada corresponde à ausência de qualquer forma de atrito entre as estruturas físicas que sustentam o vínculo, pois ela nunca dissipa energia

(não realiza trabalho, inclusive para a velocidade virtual corrente do sistema). Quando houver atrito entre essas estruturas, a reação vincular agregada será algum dos outros vetores que, somados a  $\overrightarrow{FN}_{ext}$ , mantém, o sistema vinculado.

Em geral, modela-se o atrito vincular impondo condições sobre as diversas componentes das reações vinculares, usando parâmetros físicos de atrito para representar os níveis de rugosidade e lubrificação. Essas condições podem envolver também o estado corrente do sistema, pois as forças de atrito dependem, em geral, da posição e velocidade relativas entre as superfícies em contato.

Como todas as componentes da reação vincular estão embutidas no vetor agregado  $\overrightarrow{FN}_{vin} \in \mathbf{E}$ , e o estado do sistema está descrito pelo par  $(\mathbf{q}, \overrightarrow{v\omega})$ , pode-se entender um modelo para o atrito vincular como uma relação matemática entre esses objetos. Essa relação pode ser visualizada no espaço  $\mathbf{E}$  dos esforços agregados como o lugar geométrico dos vetores  $\overrightarrow{FN}_{vin} \in \mathbf{E}$  cujas componentes satisfazem as condições impostas pelo modelo para a reação vincular. Mais precisamente, para cada estado  $(\mathbf{q}, \overrightarrow{v\omega})$  do sistema vinculado, tem-se um subconjunto  $\mathbf{A}_{\mathbf{q}}(\overrightarrow{v\omega}) \subset \mathbf{E}$  constituído pelos esforços agregados  $\overrightarrow{FN}_{vin} \in \mathbf{E}$  que satisfazem as condições impostas sobre as reações vinculares para descrever o atrito vincular.

Por exemplo, O Princípio de D'Alembert modela a situação ideal de ausência de atrito vincular impondo como condição sobre a reação vincular “que ela não realize trabalho para qualquer velocidade virtual do sistema”. Essa condição está representada no

espaço  $\mathbf{E}$  dos esforços agregados pelo subconjunto  $E_q^\perp \subset \mathbf{E}$ , que é o lugar geométrico dos vetores normais ao vínculo na configuração  $\mathbf{q}$ .

Analogamente, quaisquer condições impostas sobre as reações para descrever o atrito vincular podem ser representadas no espaço  $\mathbf{E}$  dos esforços agregados pelo lugar geométrico  $\mathbf{A}_q(\overrightarrow{v\omega})$  dos vetores  $\overrightarrow{FN}_{vin} \in \mathbf{E}$  que as satisfazem. Então um modelo de atrito vincular qualquer será representado pelo subconjunto  $\mathbf{A}_q(\overrightarrow{v\omega}) \subset \mathbf{E}$  dos esforços agregados que satisfazem as condições – relativas ao estado  $(\mathbf{q}, \overrightarrow{v\omega})$  – impostas sobre as reações vinculares para descrever o atrito.

Nestes termos, os subconjuntos  $\mathbf{A}_q(\overrightarrow{v\omega}) = E_q^\perp$  constituem aqui uma representação geométrica do modelo D'Alembertiano para o atrito vincular, isto é, aquele modelo que determina sempre a reação vincular perfeita (ausência de atrito), qualquer que seja o esforço externo aplicado sobre o sistema.

Tendo fixado um modelo qualquer para o atrito vincular (ou seja, tendo associado um conjunto  $\mathbf{A}_q(\overrightarrow{v\omega}) \subset \mathbf{E}$  a cada estado do sistema vinculado), a reação vincular a um dado esforço externo será determinada por duas condições independentes: (i) a resultante deve manter o sistema vinculado; e (ii) a reação deve satisfazer o modelo de atrito vincular. A primeira delas depende apenas da geometria do vínculo e da distribuição de massa do sistema, enquanto a segunda representa uma forma particular das estruturas físicas que sustentam o vínculo gerarem atrito em suas superfícies de contato.



Em outras palavras, a reação vincular  $\overrightarrow{FN}_{vin} \in \mathbf{E}$  a um dado esforço externo  $\overrightarrow{FN}_{ext} \in \mathbf{E}$  será determinada pelas condições:

- (i)  $\overrightarrow{FN}_{ext} + \overrightarrow{FN}_{vin} \in \mathbf{M}_{\mathbf{q}}(\overrightarrow{v\omega})$  (a resultante deve manter o sistema vinculado); e
- (ii)  $\overrightarrow{FN}_{vin} \in \mathbf{A}_{\mathbf{q}}(\overrightarrow{v\omega})$  (a reação deve satisfazer o modelo de atrito vincular).

Em geral, a construção de um modelo para o atrito vincular deverá ser feita em um outro espaço distinto de  $\mathbf{E}$ , que represente não os esforços vinculares totais que atuam sobre cada corpo, mas os esforços vinculares trocados entre eles em cada superfície de contato. A natureza desse outro espaço e sua relação com  $\mathbf{E}$  dependem do vínculo estudado. Deve-se, portanto, adiar sua discussão para o contexto das aplicações específicas dos métodos aqui representados. O modelo D'Alembert é uma exceção, cuja simplicidade permite descrevê-lo no próprio espaço  $\mathbf{E}$  pelo subconjunto  $E_q^\perp \subset \mathbf{E}$ , como foi feito na seção anterior.

## 2. Dinâmica de Robôs Manipuladores

Nesta seção é desenvolvido todo o formalismo descrito na seção 1.3 (Método) e é feita sua aplicação ao controle e modelagem de robôs obtendo a forma geral das forças de atrito que se desenvolvem nas articulações.

## 2.1. Distribuição de Esforços

O objetivo principal deste trabalho é aprimorar a descrição dada nestes modelos para o atrito presente nas articulações destes dispositivos.

Atualmente, o atrito nas articulações é descrito como dependente apenas da posição e velocidade relativas entre as partes dos corpos rígidos em contato. Essa descrição, entretanto, não é satisfatória para regimes de baixo nível de lubrificação, onde a magnitude da reação normal entre as superfícies em contato é uma variável importante na determinação das forças de atrito.

Será utilizado o formalismo apresentado na seção 1.3 deste trabalho para construir modelos dinâmicos em que o atrito associado às reações vinculares dependa também das componentes normais dessas reações. A fim de serem obtidos algoritmos do ponto de vista computacional será apresentada uma construção baseada em procedimentos do *método iterativo de Newton-Euler* (Craig, 1986). Além de conceitos e resultados apresentados na seção 1.3, será também utilizada a terminologia e a notação nela definidas.

A seção 2.1 é dedicada ao cálculo das velocidades virtuais e os esforços mantenedores do sistema mecânico vinculado que representa o robô manipulador. Nas seções 2.2 e 2.3 é introduzido um espaço vetorial cujos elementos descrevem os esforços trocados nas articulações desse robô, e estabelece-se um isomorfismo entre ele e o espaço dos esforços agregados. A seção 2.4 é dedicada à modelagem do atrito nas articulações, e

a seção 2.5 à determinação das reações vinculares segundo esses modelos. Finaliza-se discutindo a inclusão dessa modelagem dinâmica do atrito vincular em algoritmos de controle e de simulação do manipulador, nas seções 2.6 e 2.7 respectivamente.

## 2.2. Velocidades Virtuais e Esforços Mantenedores

Considere-se inicialmente um estado do manipulador descrito pelas posições e velocidades generalizadas  $(q, \dot{q})$  nas articulações. As velocidades vetoriais lineares  $\bar{v}_i(q, \dot{q})$  e angulares  $\bar{\omega}_i(q, \dot{q})$  de cada um dos seus braços ( $i = 1, \dots, n$ ), correspondentes a esse estado do sistema, podem ser calculadas como na primeira parte do método iterativo de Newton - Euler. Como essas velocidades formam uma combinação que respeita a restrição vincular, a velocidade agregada correspondente:

$$\overrightarrow{v\omega}(q, \dot{q}) = (\bar{v}_1(q, \dot{q}), \bar{\omega}_1(q, \dot{q}), \dots, \bar{v}_n(q, \dot{q}), \bar{\omega}_n(q, \dot{q})) \quad (2.2.1)$$

é uma das velocidades virtuais associadas à configuração  $\mathbf{q}$ .

Sabe-se, pela seção 1.3, que existe uma base  $[\overrightarrow{v\omega}_1, \dots, \overrightarrow{v\omega}_l]$ , do subespaço vetorial

$\mathbf{V}_q \subset \mathbf{V}$  das velocidades virtuais associadas à configuração  $\mathbf{q}$ , para a qual:

$$\overrightarrow{v\omega}(q, \dot{q}) = \sum_{\alpha=1}^l \dot{q}^\alpha \overrightarrow{v\omega}_\alpha(q). \quad (2.2.2)$$

Em termos das componentes tridimensionais dos vetores  $\overrightarrow{v\omega_\alpha} \in V$  ( $\alpha = 1, \dots, n$ ):

$$\overrightarrow{v\omega_\alpha} = (\vec{v}_{\alpha 1}, \vec{\omega}_{\alpha 1}, \vec{v}_{\alpha 2}, \vec{\omega}_{\alpha 2}, \dots, \vec{v}_{\alpha l}, \vec{\omega}_{\alpha l}) \quad . \quad (2.2.3)$$

a equação acima se escreve:

$$\begin{cases} \vec{v}_i(q, \dot{q}) = \sum_{\alpha=1}^l \dot{q}^\alpha \vec{v}_{\alpha i}(q) \\ \vec{\omega}_i(q, \dot{q}) = \sum_{\alpha=1}^l \dot{q}^\alpha \vec{\omega}_{\alpha i}(q) \end{cases} \quad (i = 1, \dots, n).$$

Os vetores  $\vec{v}_{\alpha i}(q)$  e  $\vec{\omega}_{\alpha i}(q)$  são, respectivamente, as velocidades lineares a angulares do  $i$ -ésimo braço, correspondentes ao estado do manipulador em que  $q$   $\alpha$ -ésima velocidade generalizada é unitária e todas as demais são nulas ( $\alpha, i = 1, \dots, n$ ). Note-se que esses vetores dependem das coordenadas generalizadas  $q$ , mas não das velocidades generalizadas  $\dot{q}$ . Assim  $\vec{v}_{\alpha i}(q)$  e  $\vec{\omega}_{\alpha i}(q)$  podem ser calculados iterativamente, segundo o processo usado na primeira parte do método de Newton - Euler (Craig, 1986). Esse é um procedimento eficiente, do ponto de vista computacional, para se obter a base vetorial  $[\overrightarrow{v\omega_1}, \dots, \overrightarrow{v\omega_l}]$ .

Na primeira parte do método iterativo de Newton - Euler, parte-se de um valor dado para as coordenadas, velocidades e acelerações generalizadas:  $(q, \dot{q}, \ddot{q})$  e calculam-se os pares força-torque  $(\vec{F}_i, \vec{N}_i)$  que descrevem a distribuição de todos os esforços que atuam sobre o  $i$ -ésimo braço do manipulador ( $i = 1, \dots, n$ ).

Essas forças e torques representados por  $\vec{F}_i(q, \dot{q}, \ddot{q})$  e  $\vec{N}_i(q, \dot{q}, \ddot{q})$ , respectivamente, constituem o vetor agregado:

$$\vec{FN}(q, \dot{q}, \ddot{q}) = (\vec{F}_1(q, \dot{q}, \ddot{q}), \vec{N}_1(q, \dot{q}, \ddot{q}), \dots, \vec{F}_l(q, \dot{q}, \ddot{q}), \vec{N}_l(q, \dot{q}, \ddot{q})) \quad (2.2.4)$$

que é exatamente o esforço mantenedor do estado  $(q, \dot{q})$  correspondente às acelerações generalizadas  $\ddot{q}$ , Tem-se, portanto, a seguinte caracterização dos esforços mantenedores do robô manipulador:

*Uma condição necessária e suficiente para que um esforço agregado  $\vec{FN} \in \mathbf{E}$  seja mantenedor do estado  $(q, \dot{q})$  é que suas componentes tridimensionais força-torque possam ser obtidas, segundo o procedimento usado na primeira parte do método iterativo de Newton - Euler, a partir das mesmas acelerações generalizadas  $(\ddot{q}^1, \dots, \ddot{q}^n)$ .*

Sabe-se que os esforços mantenedores de um estado  $(\mathbf{q}, \vec{v\omega})$  formam um subespaço afim  $\mathbf{M}_q(\vec{v\omega})$  do espaço  $\mathbf{E}$  dos esforços agregados (seção 1.3), e que esse subespaço pode ser descrito parametricamente por:

$$\vec{FN}(q, \dot{q}, \ddot{q}) = \sum_{\alpha=1}^l \ddot{q}^\alpha \vec{PL}_\alpha(q) + \vec{FN}(q, \dot{q}, 0) , \quad (2.2.5)$$

onde os vetores agregados  $\vec{PL}_\alpha \in \mathbf{E}$ :

$$\overrightarrow{PL}_\alpha = (\bar{P}_{\alpha 1}, \bar{L}_{\alpha 1}, \bar{P}_{\alpha 2}, \bar{L}_{\alpha 2}, \dots, \bar{P}_{\alpha i}, \bar{L}_{\alpha i},) \quad (2.2.6)$$

são dados por:

$$\begin{cases} \bar{P}_{\alpha i}(q) = m_i \bar{v}_{\alpha i}(q) \\ \bar{L}_{\alpha i}(q) = I_i [\bar{\omega}_{\alpha i}(q)] \end{cases} \quad (\alpha, i = 1, \dots, n).$$

Estes  $n$  vetores diretores  $\overrightarrow{PL}_\alpha \in \mathbf{E}$  do subespaço afim  $\mathbf{M}_q(\overrightarrow{v\omega}) \subset \mathbf{E}$  podem então ser obtidos diretamente a partir da base vetorial  $[\overrightarrow{v\omega}_1, \dots, \overrightarrow{v\omega}_i]$  construída acima.

Por sua vez, o vetor:

$$\overrightarrow{FN}(q, \dot{q}, 0) = (\bar{F}_1(q, \dot{q}, 0), \bar{N}_1(q, \dot{q}, 0), \dots, \bar{F}_n(q, \dot{q}, 0), \bar{N}_n(q, \dot{q}, 0)), \quad (2.2.7)$$

que fornece o deslocamento do subespaço afim  $\mathbf{M}_q(\overrightarrow{v\omega}) \subset \mathbf{E}$  em relação à origem, pode ser calculado iterativamente como na primeira parte do método de Newton-Euler, partindo-se das coordenadas e velocidades generalizadas  $(q, \dot{q})$ , mas considerando as acelerações generalizadas nulas.

Tem-se, assim, um procedimento iterativo simples e eficiente (do ponto de vista computacional) para se obter a representação paramétrica acima definida do subespaço afim  $\mathbf{M}_q(\overrightarrow{v\omega})$  dos esforços mantenedores do vínculo que representa o robô manipulador.

### 2. 3. O Isomorfismo Canônico

Na segunda parte do método iterativo de Newton-Euler, calculam-se as distribuições dos esforços trocados entre braços consecutivos do robô, isto é, trocados em cada junta. Seguindo a notação utilizada 1.3, descreve-se pelo par  $(\vec{f}_i, \vec{n}_i)$  a distribuição dos esforços aplicados pelo braço  $i - 1$  sobre o  $i$ -ésimo braço manipulador, tomando-se como pólo o ponto  $J_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ). A distribuição dos esforços de reação (no sentido da Terceira lei de Newton), aplicados pelo  $i$ -ésimo braço sobre o braço  $i - 1$  ( $i = 2, \dots, n$ ), fica naturalmente descrita pelo par  $(-\vec{f}_i, -\vec{n}_i)$  em um único vetor  $6n$ -dimensional:

$$\vec{fn} = (\vec{f}_1, \vec{n}_1, \vec{f}_2, \vec{n}_2, \dots, \vec{f}_n, \vec{n}_n), \quad (2.3.1)$$

e assim fica definido um espaço vetorial  $\mathbf{J}$ , de dimensão  $6n$ , que é chamado de *espaço dos esforços trocados* nas articulações do manipulador.

Este espaço vetorial  $\mathbf{J}$  não deve ser confundido com o *espaço dos esforços agregados*  $\mathbf{E}$  introduzido na seção 1.3. Os vetores agregados *agregado*  $\overline{FN} \in \mathbf{E}$  foram aí definidos como:

$$\overline{FN} = (\vec{F}_1, \vec{N}_1, \vec{F}_2, \vec{N}_2, \dots, \vec{F}_n, \vec{N}_n). \quad (2.3.2)$$

onde cada par  $(\vec{F}_i, \vec{N}_i)$  representa a distribuição dos esforços aplicados sobre o  $i$ -ésimo corpo rígido (que constitui o sistema mecânico) tomando-se como pólo o seu centro de massa ( $i = 1, \dots, n$ ). No caso presente, portanto, os pares  $(\vec{F}_i, \vec{N}_i)$  são relativos aos centro de

massa  $C_i$  do  $i$ -ésimo braço do manipulador, enquanto os pares  $(\vec{f}_i, \vec{n}_i)$  são calculados em relação aos pontos  $J_i$ .

Na segunda parte do método de Newton-Euler, o cálculo dos pares  $(\vec{f}_i, \vec{n}_i)$  a partir do  $(\vec{F}_i, \vec{N}_i)$  também é feito iterativamente, partindo-se agora da extremidade livre do manipulador, até sua base fixa. Para tanto fazemos o “balanço” (seção 1.3) dos esforços aplicados em cada braço:

$$\begin{cases} \vec{F}_i = \vec{f}_i - \vec{f}_{i+1} \\ \vec{N}_i = [\vec{n}_i + \overrightarrow{C_i J_i} \times \vec{f}_i] = [(-\vec{n}_{i+1}) + \overrightarrow{C_i J_{i+1}} \times (-\vec{f}_{i+1})] \end{cases} \quad (2.3.3)$$

$(i=1, \dots, n-1)$

$$\begin{cases} \vec{F}_n = \vec{f}_n \\ \vec{N}_n = [\vec{n}_n + \overrightarrow{C_n J_n} \times \vec{f}_n] \end{cases} \quad (2.3.4)$$

Estas  $n$  equações vetoriais estabelecem um *isomorfismo vetorial* entre o espaço  $\mathbf{J}$  dos esforços trocados (definido acima) e espaço  $\mathbf{E}$  dos esforços agregados. Em outras palavras, podem-se considerar as  $2n$  equações vetoriais acima como uma função que associa a cada vetor agregado de  $\mathbf{J}$ :

$$\vec{fn} = (\vec{f}_1, \vec{n}_1, \vec{f}_2, \vec{n}_2, \dots, \vec{f}_n, \vec{n}_n), \quad (2.3.5)$$

um outro vetor agregado de  $\mathbf{E}$ :

$$\overrightarrow{FN} = (\vec{F}_1, \vec{N}_1, \vec{F}_2, \vec{N}_2, \dots, \vec{F}_n, \vec{N}_n). \quad (2.3.6)$$



É fácil verificar que esta função define uma *transformação linear* de  $\mathbf{J}$  em  $\mathbf{E}$ . O procedimento iterativo usado na segunda parte do método de Newton-Euler, que calcula os pares  $(\vec{f}_i, \vec{n}_i)$  a partir de  $(\vec{F}_i, \vec{N}_i)$ , mostra que essa transformação linear é inversível, ou seja, que ela define uma correspondência biunívoca linear entre os espaços  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{J}$ . Essa transformação linear é aqui chamada de *isomorfismo vetorial canônico* entre  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{J}$ .

Dois vetores  $\vec{FN} \in \mathbf{E}$  e  $\vec{fn} \in \mathbf{J}$  colocados em correspondência por este isomorfismo representam, de duas formas distintas, uma mesma combinação de esforços atuando nos diversos braços do manipulador. Pode-se, assim, transportar para  $\mathbf{J}$  a noção de esforço mantenedor do vínculo que representa o robô: será dito que  $\vec{fn} \in \mathbf{J}$  mantém o estado  $(q, \vec{v}\omega)$  vinculado quando ele for equivalente, segundo o isomorfismo canônico, a um esforço mantenedor  $\vec{FN} \in \mathbf{M}_q(\vec{v}\omega) \subset \mathbf{E}$ .

Pela caracterização dos esforços mantenedores vista na seção anterior obtém-se então:

*Uma condição necessária e suficiente para que um esforço  $\vec{fn} \in \mathbf{J}$  seja mantenedor do estado  $(q, \dot{q})$  é que suas componentes tridimensionais força-torque possam ser obtidas, segundo o método iterativo de Newton-Euler, a partir das mesmas acelerações generalizadas  $(\ddot{q}^1, \dots, \ddot{q}^n)$ .*

Essa caracterização dos esforços mantenedores trocados nas articulações do manipulador foi utilizada, na seção 1.3, para discutir a equivalência entre o método iterativo de Newton-Euler e a hipótese de reações vinculares perfeitas.

Utilizando o isomorfismo canônico, pode-se também transportar para  $\mathbf{J}$  o subespaço afim  $\mathbf{M}_q(\overrightarrow{v\omega}) \subset \mathbf{E}$  de todos os esforços mantenedores do estado  $(q, \overrightarrow{v\omega})$ , obtendo-se, assim, um subespaço afim de  $\mathbf{J}$  que será designado por  $\mathbf{M}_q^J(\overrightarrow{v\omega})$ . Os elementos desse subespaço afim  $\mathbf{M}_q^J(\overrightarrow{v\omega}) \subset \mathbf{J}$  são exatamente os vetores  $\overrightarrow{fn} \in \mathbf{J}$  que representam as combinações de esforços trocados nas juntas que mantêm o estado  $(q, \overrightarrow{v\omega})$  vinculado.

Para calcular efetivamente este subespaço afim  $\mathbf{M}_q^J(\overrightarrow{v\omega}) \subset \mathbf{J}$ , pode-se transportar para  $\mathbf{J}$  a parametrização de  $\mathbf{M}_q^J(\overrightarrow{v\omega}) \subset \mathbf{E}$  obtida na seção anterior. Ou seja, transferem-se para  $\mathbf{J}$ , pelo isomorfismo canônico, os  $n$  vetores agregados  $\overrightarrow{PL}_\alpha \in \mathbf{E}$  e, também, no vetor  $\overrightarrow{FN}(q, \dot{q}, 0) \in \mathbf{E}$ , obtendo-se, respectivamente:

$$\overrightarrow{pl}_\alpha \in \mathbf{J} \quad (\alpha = 1, \dots, n) \quad \text{e} \quad \overrightarrow{fn}(q, \dot{q}, 0) \in \mathbf{J}.$$

Esses  $n+1$  vetores descrevem parametricamente o subespaço afim  $\mathbf{M}_q^J(\overrightarrow{v\omega}) \subset \mathbf{J}$  correspondente ao estado  $(q, \dot{q})$ , uma vez que os vetores  $\overrightarrow{fn} \in \mathbf{M}_q^J(\overrightarrow{v\omega})$  são dados por:

$$\overrightarrow{fn}(q, \dot{q}, \ddot{q}) = \sum_{\alpha=1}^l \ddot{q}^\alpha \overrightarrow{pl}_\alpha(q) + \overrightarrow{fn}(q, \dot{q}, 0), \quad (2.3.7)$$

onde  $\ddot{q}$  é a aceleração generalizada do robô que resulta da aplicação de  $\overrightarrow{fn} \in \mathbf{M}_q^J(\overrightarrow{v\omega})$  sobre esse estado do sistema.

Para maior clareza, é descrito, passo a passo, este procedimento que calcula o subespaço afim  $\mathbf{M}_q^J(\overrightarrow{v\omega}) \subset \mathbf{J}$ :

(1) Calculam-se os  $n$  vetores  $\overrightarrow{v\omega}_\alpha \in \mathbf{V}$  aplicando  $n$  vezes o processo iterativo usado na primeira parte do método de Newton-Euler.

(2) Calculam-se os  $n$  vetores diretores  $\overrightarrow{PL}_\alpha \in \mathbf{E}$  multiplicando cada  $\overrightarrow{v\omega}_\alpha$  pelas massa do sistema.

(3) Calcula-se iterativamente o esforço agregado  $\overrightarrow{FN}(q, \dot{q}, 0)$  como na primeira parte do método de Newton-Euler.

(4) Aplica-se o processo iterativo usado na segunda parte do método de Newton-Euler  $n+1$  vezes, uma para cada vetor agregado  $\overrightarrow{PL}_\alpha \in \mathbf{E}$  ( $\alpha = 1, \dots, n$ ) e uma última vez para o vetor  $\overrightarrow{FN}(q, \dot{q}, 0) \in \mathbf{E}$ , obtendo então, respectivamente, os vetores  $\overrightarrow{pl}_\alpha \in \mathbf{J}$  ( $\alpha = 1, \dots, n$ ) e  $\overrightarrow{fn}(q, \dot{q}, 0) \in \mathbf{J}$  que descrevem parametricamente o subespaço afim  $\mathbf{M}_q^J(\overrightarrow{v\omega}) \subset \mathbf{J}$  correspondente ao estado  $(q, \dot{q})$  do manipulador.

## 2.4. Decomposição dos Esforços Trocados

Considere-se, agora, que cada articulação do manipulador esteja provida de um *atuador* capaz de aplicar um esforço motor de intensidade controlável. Se a  $i$ -ésima junta for rotacional então pode-se fazer com que os braços  $i - 1$  e  $i$  troquem uma distribuição de esforços descrita por uma par da forma  $(\vec{0}, \vec{n}_i^{mot})$ , com  $\vec{n}_i^{mot} = \tau_i \vec{e}_i$ . Por outro lado, se a  $i$ -ésima junta for prismática pode-se fazer com que os braços  $i - 1$  e  $i$  troquem uma distribuição de esforços descrita por uma par da forma  $(\vec{f}_i^{mot}, \vec{0})$ , com  $\vec{f}_i^{mot} = \tau_i \vec{e}_i$ . Ou seja, esta-se representando por  $\tau_i$  o esforço motor escalar aplicado pelo atuador da  $i$ -ésima articulação (torque escalar, se a junta for rotacional, ou força escalar, se ela for prismática). Abrevia-se, também, a  $n$ -upla  $(\tau_1, \dots, \tau_n)$  por  $\tau$ . (Esta é a notação convencionada na seção 1.3).

Agregando os  $n$  pares força-torque correspondentes às  $n$  articulações, define-se o vetor agregado  $\vec{fn}_{mot} \in \mathbf{J}$  que representa os esforços motores trocados em todas as juntas:

$$\vec{fn}_{mot} = \left( \vec{f}_1^{mot}, \vec{n}_1^{mot}, \vec{f}_2^{mot}, \vec{n}_2^{mot}, \dots, \vec{f}_n^{mot}, \vec{n}_n^{mot} \right), \quad (2.4.1)$$

onde  $(\vec{f}_i^{mot}, \vec{n}_i^{mot})$  é o par que descreve a distribuição dos esforços motores trocados na junta  $i$ , independentemente dela ser rotacional ou prismática ( $i = 1, \dots, n$ ).

O conjunto de todos os esforços motores que podem se aplicados pelos atuadores forma um subespaço vetorial  $\mathbf{M}_q^{\parallel}$  de dimensão  $n$ , do espaço  $\mathbf{J}$  dos esforços trocados. Para

verificar isso, basta observar que o vetor agregado  $\vec{fn}_{mot}(\tau)$  correspondente ao esforço motor  $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_n)$  é dado por:

$$\vec{fn}_{mot}(\tau) = \sum_{\alpha=1}^n \tau_{\alpha} \vec{fn}_{\alpha}(q), \quad (2.4.2)$$

onde:

$$\vec{fn}_{\alpha} = (\vec{0}, \vec{0}, \dots, \vec{0}, \vec{e}_{\alpha}, \dots, \vec{0}, \vec{0}), \quad (2.4.3)$$

se a  $\alpha$ -ésima junta  $\alpha$  for rotacional; ou

$$\vec{fn}_{\alpha} = (\vec{0}, \vec{0}, \dots, \vec{e}_{\alpha}, \vec{0}, \dots, \vec{0}, \vec{0}), \quad (2.4.4)$$

se a  $\alpha$ -ésima junta  $\alpha$  for prismática. ( O par de vetores tridimensionais representados entre reticências nas  $2n$ -uplas acima ocupa as posições  $2\alpha - 1$  e  $2\alpha$ ).

O subconjunto  $\mathbf{J}_{\mathbf{q}}^{\parallel} \subset \mathbf{J}$  de todos os esforços motores que podem ser aplicados pelos atuadores é portanto o subespaço vetorial de  $\mathbf{J}$  gerado pelos vetores  $[\vec{fn}_1, \dots, \vec{fn}_n]$ . Além disso, como esses geradores são linearmente independentes, eles formam uma base vetorial de  $\mathbf{J}_{\mathbf{q}}^{\parallel}$ , o que mostra que sua dimensão é  $n$ . É importante observar que esse subespaço vetorial  $\mathbf{J}_{\mathbf{q}}^{\parallel} \subset \mathbf{J}$  depende da configuração  $\mathbf{q}$  do robô, mas não de sua velocidade.

Durante um movimento qualquer do robô manipulador, a distribuição de esforços trocados entre cada par de braços consecutivos pode ser decomposta conceitualmente (seção 1.3) em duas outras: uma formada pelos *esforços motores* aplicados pelo atuador correspondente, e outra pelas *reações vinculares* resistidas pelo suporte físico da junta.

Se o par  $(\vec{f}_i^{vin}, \vec{n}_i^{vin})$  descreve a distribuição dos esforços de reação vincular trocados na junta  $i$  (tomando como pólo o ponto  $J_i$ , como convencionou-se na seção 1.3) então tem-se:

$$\begin{cases} \vec{f}_i = \vec{f}_i^{mot} + \vec{f}_i^{vin} \\ \vec{n}_i = \vec{n}_i^{mot} + \vec{n}_i^{vin} \end{cases} \quad (2.4.5)$$

$$(i = 1, \dots, n).$$

Essas  $n$  decomposições de esforços trocados em motores e vinculares podem ser agregadas em uma única equação no espaço  $\mathbf{J}$ :

$$\vec{fn} = \vec{fn}_{mot} + \vec{fn}_{vin}, \quad (2.4.6)$$

se for definido o vetor  $\vec{fn}_{vin} \in \mathbf{J}$  por:

$$\vec{fn}_{vin} = (\vec{f}_1^{vin}, \vec{n}_1^{vin}, \vec{f}_2^{vin}, \vec{n}_2^{vin}, \dots, \vec{f}_n^{vin}, \vec{n}_n^{vin}). \quad (2.4.7)$$

Foi provado na seção 1.3 que o trabalho conjunto realizado pelas  $n$  distribuições de esforços descritas pelas componentes de  $\vec{f}n_{vin} \in \mathbf{J}$  é nulo, para qualquer velocidade virtual do sistema, quando:

$$\vec{n}_i^{vin} \cdot \vec{e}_i = 0, \quad \text{em cada junta rotacional,}$$

$$\vec{f}_i^{vin} \cdot \vec{e}_i = 0, \quad \text{em cada junta prismática.}$$

Estas  $n$  equações lineares definem um subespaço vetorial  $\mathbf{J}_q^\perp$ , de dimensão  $5n$ , do espaço  $\mathbf{J}$  dos esforços trocados. Esse subespaço vetorial  $\mathbf{J}_q^\perp \subset \mathbf{J}$  depende da configuração  $\mathbf{q}$  do robô, mas não das velocidades.

Os vetores  $\vec{f}n$  pertencentes a  $\mathbf{J}_q^\perp \subset \mathbf{J}$  são exatamente aqueles que não realizam trabalho, para qualquer velocidade virtual associada a  $\mathbf{q}$ . Concluí-se então que:

*O isomorfismo canônico coloca em correspondência biunívoca os subespaços  $\mathbf{J}_q^\perp \subset \mathbf{J}$  e  $\mathbf{E}_q^\perp \subset \mathbf{E}$ .*

É fácil ver que os subespaços  $\mathbf{J}_q^\perp$  e  $\mathbf{J}_q^\parallel$  são transversais entre si, e que a soma das suas dimensões é igual à dimensão do próprio  $\mathbf{J}$  ( $n + 5n = 6n$ ). Portanto o espaço dos esforços trocados pode ser escrito como a soma direta:

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_q^{\parallel} \oplus \mathbf{J}_q^{\perp}. \quad (2.4.8)$$

A decomposição de um esforço agregado  $\vec{f}_n \in \mathbf{J}$  em esforços motores e vinculares segundo esta soma direta:

$$\vec{f}_n = \vec{f}_{n\,mot} + \vec{f}_{n\,vin}, \quad (2.4.9)$$

$$\text{com } \vec{f}_{n\,mot} \in \mathbf{J}_q^{\parallel} \quad \text{e} \quad \vec{f}_{n\,vin} \in \mathbf{J}_q^{\perp}$$

equivale à decomposição utilizada no métodos iterativo de Newton-Euler:

$$\begin{cases} \vec{f}_i^{mot} = \vec{0} \\ \vec{n}_i^{mot} = (\vec{n}_i \cdot \vec{e}_i) \vec{e}_i \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \vec{f}_i^{vin} = \vec{f}_i \\ \vec{n}_i^{vin} = \vec{n}_i - \vec{n}_i^{mot} \end{cases} \quad (\text{junta rotacional})$$

ou

$$\begin{cases} \vec{f}_i^{mot} = (\vec{f}_i \cdot \vec{e}_i) \vec{e}_i \\ \vec{n}_i^{mot} = \vec{0} \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \vec{f}_i^{vin} = \vec{f}_i - \vec{f}_i^{mot} \\ \vec{n}_i^{vin} = \vec{n}_i \end{cases} \quad (\text{junta prismática})$$

## 2.5. O Atrito Vincular nas Articulações

Considere-se agora o atrito presente em cada articulação do robô manipulador como componente dissipativa das reações vinculares nela trocadas. Nesse caso, a



decomposição dos esforços trocados em motores e vinculares será diferente daquela vista na seção anterior.

A potência correspondente a uma distribuição qualquer de esforços vinculares  $(\vec{f}_i^{vin}, \vec{n}_i^{vin})$  trocados na  $i$ -ésima articulação do robô pode ser escrita, segundo os resultados da seção 1.3, como:

$$W_i^{vin} = \dot{q}^i (\vec{n}_i^{vin} \cdot \vec{e}_i), \quad (2.5.1)$$

se a  $i$ -ésima junta for rotacional,

ou

$$W_i^{vin} = \dot{q}^i (\vec{f}_i^{vin} \cdot \vec{e}_i), \quad (2.5.2)$$

se a  $i$ -ésima junta for prismática.

Essa potência  $W_i^{vin}$  mede exatamente a energia dissipada na unidade de tempo pelo atrito na  $i$ -ésima articulação do manipulador

Se esta  $i$ -ésima articulação for rotacional, então pode-se decompor o torque vincular  $\vec{n}_i^{vin}$  trocado junta em suas componentes paralela  $\vec{n}_i^{\parallel}$  e normal  $\vec{n}_i^{\perp}$  ao seu eixo:

$$\vec{n}_i^{vin} = \vec{n}_i^{\parallel} + \vec{n}_i^{\perp}. \quad (2.5.3)$$

A expressão acima  $W_i^{vin}$  mostra então que  $\vec{n}_i^{\parallel}$  é o *torque de atrito* nessa articulação.

Por outro lado, se a  $i$ -ésima articulação for prismática, então pode-se decompor a força vincular  $\vec{f}_i^{vin}$  trocada nessa junta em suas componentes paralela  $\vec{f}_i^{\parallel}$  e normal  $\vec{f}_i^{\perp}$  à sua direção de deslocamento:

$$\vec{f}_i^{vin} = \vec{f}_i^{\parallel} + \vec{f}_i^{\perp}. \quad (2.5.4)$$

A expressão acima  $W_i^{vin}$  mostra então que  $\vec{f}_i^{\parallel}$  é a *força de atrito* nessa articulação.

Um *modelo para o atrito vincular* nessa junta deve fornecer então o valor dessa componente dissipativa:

$\vec{n}_i^{\parallel}$ , se a  $i$ -ésima junta for rotacional,

ou

$\vec{f}_i^{\parallel}$ , se a  $i$ -ésima junta for prismática,

em função das componentes complementares do par  $(\vec{f}_i^{vin}, \vec{n}_i^{vin})$ , da posição  $q^i$  e da velocidade  $\dot{q}^i$  relativas nessa articulação.

Por exemplo, pode-se impor que em uma certa junta rotacional o módulo do torque de atrito dependa linearmente do módulo da componente do torque vincular normal ao eixo, e do módulo da força vincular  $\vec{f}_i^{vin}$ :

$$|\vec{n}_i^{\parallel}| = k_1 |\vec{n}_i^{\perp}| + k_2 |\vec{f}_i^{vin}|, \quad (2.5.5)$$

onde os coeficientes  $k_1$  e  $k_2$  podem depender arbitrariamente de  $(q^i, \dot{q}^i)$ . Como o sentido do torque de atrito é sempre o oposto ao da velocidade angular relativa  $\dot{q}^i$ , a equação acima determina univocamente esse torque de atrito  $\vec{n}_i^{\parallel}$  em função das variáveis dinâmicas  $(\vec{n}_i^{\perp}, \vec{f}_i^{vin}, q^i, \dot{q}^i)$ .

Pode-se também sofisticar esse modelo para o atrito com uma junta rotacional considerando separadamente a dependência de  $\vec{n}_i^{\parallel}$  nas componentes de  $\vec{f}_i^{vin}$  normal  $\vec{f}_i^{\perp}$  e tangencial  $\vec{f}_i^{\parallel}$  ao eixo da articulação:

$$|\vec{n}_i^{\parallel}| = k_1 |\vec{n}_i^{\perp}| + k_2 |\vec{f}_i^{\perp}| + k_3 |\vec{f}_i^{\parallel}|, \quad (2.5.6)$$

ou ainda, mais geralmente, considerando uma dependência arbitrária do torque de atrito em relação a  $(\vec{n}_i^{\perp}, \vec{f}_i^{vin}, q^i, \dot{q}^i)$ .

No caso de uma articulação prismática pode-se, por exemplo, tomar:

$$|\vec{f}_i^{\parallel}| = k_1 |\vec{f}_i^{\perp}| + k_2 |\vec{n}_i^{\perp}| + k_3 |\vec{n}_i^{\parallel}|, \quad (2.5.7)$$

ou, em geral, qualquer dependência da força de atrito  $\vec{f}_i^{\parallel}$  em relação às variáveis dinâmicas  $(\vec{f}_i^{\perp}, \vec{n}_i^{vin}, q^i, \dot{q}^i)$ .

Seja, agora, fixado um modelo para o atrito em cada articulação do manipulador.

Para cada valor das coordenadas  $q = (q^1, \dots, q^n)$  e velocidades  $\dot{q} = (\dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n)$  generalizadas, esses  $n$  modelos definem uma aplicação que calcula a *componente dissipativa*  $\vec{fn}_{vin}^{\parallel} \in \mathbf{J}_q^{\parallel}$  da reação vincular a partir de sua componente perfeita  $\vec{fn}_{vin}^{\perp} \in \mathbf{J}_q^{\perp}$ . Essa função de  $\mathbf{J}_q^{\perp}$  em  $\mathbf{J}_q^{\parallel}$  é aqui chamada de *aplicação atrito* do estado  $(\mathbf{q}, \vec{v\omega})$ .

Como a aplicação atrito leva  $5n$  variáveis escalares (componentes dos esforços vinculares normais eixo de cada uma das  $n$  juntas) em outras  $n$  variáveis escalares (o esforço de atrito em cada uma dessas  $n$  juntas), seu gráfico pode ser visualizado como uma “superfície” de dimensão  $5n$  mergulhada no espaço  $\mathbf{J}$ . Representa-se esse *lugar geométrico* por  $\mathbf{A}_q^{\mathbf{J}}(\vec{v\omega}) \subset \mathbf{J}$ , onde  $(\mathbf{q}, \vec{v\omega})$  é o estado do sistema descrito por  $(q, \dot{q})$ . Uma reação vincular  $\vec{fn}_{vin} \in \mathbf{J}$  pertence ao subconjunto  $\mathbf{A}_q^{\mathbf{J}}(\vec{v\omega}) \subset \mathbf{J}$  se e somente se todas as suas componentes  $(\vec{f}_i^{vin}, \vec{n}_i^{vin})$  satisfizerem o modelo de atrito da articulação correspondente ( $i = 1, \dots, n$ ).

O exemplo mais simples de modelo para o atrito é aquele que supõe reações vinculares perfeitas do sistema mecânico. Nesse caso a aplicação atrito é identicamente

nula, e tem-se simplesmente  $\mathbf{A}_q^J(\overrightarrow{v\omega}) = \mathbf{J}_q^\perp$ , para qualquer  $\overrightarrow{v\omega} \in \mathbf{V}_q$ , isto é, ausência de atrito vincular em todas as articulações do manipulador.

## 2.6. Determinação das Reações Vinculares

Como discutido na seção 1.3 deste trabalho, as reações vinculares a um esforço externo qualquer são determinada por duas condições independentes:

- (i) a resultante deve manter o sistema vinculado; e
- (ii) a reação deve satisfazer o modelo de atrito vincular.

A primeira destas condições foi representada aqui pelo subespaço afim  $\mathbf{M}_q(\overrightarrow{v\omega}) \subset \mathbf{E}$  dos esforços mantenedores do estado  $(\mathbf{q}, \overrightarrow{v\omega})$ . A segunda delas, por outro lado, foi representada pelo subconjunto  $\mathbf{A}_q^J(\overrightarrow{v\omega}) \subset \mathbf{J}$ . Para que as reações vinculares possam ser determinadas pela imposição simultaneamente de ambas, pode-se transportar  $\mathbf{A}_q^J(\overrightarrow{v\omega}) \subset \mathbf{J}$  para  $\mathbf{E}$  pelo isomorfismo canônico, obtendo assim o conjunto representado por  $\mathbf{A}_q(\overrightarrow{v\omega}) \subset \mathbf{E}$  na seção 1.3, onde foram consideradas as duas condições acima impostas sobre os esforços agregados  $\overrightarrow{FN} \in \mathbf{E}$ .

Para o sistema mecânico que representa o robô manipulador, entretanto, é mais simples, do ponto de vista operacional, considerar as duas condições acima impostas diretamente sobre os esforços trocados nas articulações  $\overrightarrow{fn} \in \mathbf{J}$ , e não sobre os esforços

agregados  $\overrightarrow{FN} \in \mathbf{E}$ . Assim, considerando os esforços motores  $\overrightarrow{fn}_{mot} \in \mathbf{J}_q^{\parallel}$  como esforços externos aplicados sobre esse sistema mecânico vinculado, a reação vincular  $\overrightarrow{fn}_{vin} \in \mathbf{J}$  correspondente será determinada pelas duas condições simultâneas:

- (i)  $\overrightarrow{fn}_{mot} + \overrightarrow{fn}_{vin} \in \mathbf{M}_q^{\mathbf{J}}(\overrightarrow{v\omega})$  (a resultante deve manter o sistema vinculado); e
- (ii)  $\overrightarrow{fn}_{vin} \in \mathbf{A}_q^{\mathbf{J}}(\overrightarrow{v\omega})$  (a reação deve satisfazer o modelo de atrito vincular).

Na hipótese de reações vinculares perfeitas, por exemplo, a segunda condição acima é simplesmente  $\overrightarrow{fn}_{vin} \in \mathbf{J}_q^{\perp}$ , qualquer que seja o estado  $(\mathbf{q}, \overrightarrow{v\omega})$ . Nesse caso, a reação vincular é simplesmente o vetor  $\overrightarrow{fn}_{vin}$  do subespaço  $\mathbf{J}_q^{\perp} \subset \mathbf{J}$  tal que  $\overrightarrow{fn}_{mot} + \overrightarrow{fn}_{vin} \in \mathbf{M}_q^{\mathbf{J}}(\overrightarrow{v\omega})$ . Sempre existe um e um único vetor nessas condições, pois:

*O subespaço afim  $\mathbf{M}_q^{\mathbf{J}}(\overrightarrow{v\omega}) \subset \mathbf{J}$  é o gráfico de uma aplicação de  $\mathbf{J}_q^{\parallel} \subset \mathbf{J}$  em  $\mathbf{J}_q^{\perp} \subset \mathbf{J}$ .*

Para verificar esta afirmação, basta lembrar que, em  $\mathbf{E}$ , os subespaços  $\mathbf{M}_q(\overrightarrow{v\omega})$  e  $\mathbf{E}_q^{\perp}$  são transversais entre si (seção 1.3), e que o isomorfismo canônico coloca em correspondência biunívoca os subespaços  $\mathbf{E}_q^{\perp} \subset \mathbf{E}$  e  $\mathbf{J}_q^{\perp} \subset \mathbf{J}$  (seção 4.3).

A aplicação mantenedora do estado  $(\mathbf{q}, \overrightarrow{v\omega})$  será definida como a função que leva cada  $\overrightarrow{fn}^{\parallel} \in$  no  $\mathbf{J}_q^{\parallel}$  vetor  $\overrightarrow{fn}^{\perp} \in \mathbf{J}_q^{\perp}$  tal que  $\overrightarrow{fn}^{\parallel} + \overrightarrow{fn}^{\perp} \in \mathbf{M}_q^{\mathbf{J}}(\overrightarrow{v\omega})$ .

Se não houver atrito (isto é, se  $\mathbf{A}_q^J(\vec{v}\omega) = \mathbf{J}_q^\perp$ ) então a reação vincular perfeita ao esforço motor  $\vec{f}n_{mot} \in \mathbf{J}_q^\parallel$  é simplesmente a imagem desse vetor pela aplicação mantenedora.

## 2.7. Controle de Robôs Manipuladores

Pode-se agora utilizar a caracterização da reação vincular dissipativa vista acima para mostrar como os modelos de atrito (nas articulações) aqui definidos podem ser incluídos em um *algoritmo de controle* do manipulador.

Nesta inclusão, deve-se supor dado  $(q, \dot{q}, \ddot{q})$  e calcular o esforço motor  $\vec{f}n_{mot} \in \mathbf{J}_q^\parallel$  que provoca exatamente as acelerações generalizadas  $\ddot{q}$  quando aplicado sobre o estado do sistema descrito pelas coordenadas e velocidades generalizadas  $(q, \dot{q})$ .

Para determinar este esforço motor requerido, podem-se calcular inicialmente os esforços  $\vec{f}n(q, \dot{q}, \ddot{q}) \in \mathbf{J}$  trocados nas juntas correspondentes às acelerações desejadas e ao estado corrente do sistema, exatamente como é feito no método iterativo de Newton - Euler. Esse vetor deve então ser decomposto em:

$$\vec{f}n(q, \dot{q}, \ddot{q}) = \vec{f}n_{mot} + \vec{f}n_{vin}, \quad (2.7.1)$$

com  $\vec{f}n_{mot} \in \mathbf{J}_q^{\parallel}$  e  $\vec{f}n_{vin} \in \mathbf{A}_q^J(\vec{v}\omega)$

A primeira das duas condições que determinam a reação vincular está automaticamente satisfeita, pois  $\vec{f}n(q, \dot{q}, \ddot{q})$  é um esforço mantenedor do estado  $(q, \dot{q})$ , pela sua própria construção.

Como  $\vec{f}n_{mot} \in \mathbf{J}_q^{\parallel}$ , resulta que:

$$\vec{f}n_{mot}^{\parallel} = \vec{f}n_{mot} \text{ e } \vec{f}n_{mot}^{\perp} = \vec{0}, \quad (2.7.2)$$

logo:

$$\vec{f}n^{\parallel}(q, \dot{q}, \ddot{q}) = \vec{f}n_{mot} + \vec{f}n_{vin}^{\parallel} \quad (2.7.3)$$

$$\vec{f}n^{\perp}(q, \dot{q}, \ddot{q}) = \vec{f}n_{vin}^{\perp}, \quad (2.7.4)$$

portanto a segunda condição estará satisfeita se for tomado:

$$\vec{f}n_{mot} = \vec{f}n^{\parallel}(q, \dot{q}, \ddot{q}) - \vec{f}n_{vin}^{\parallel}, \quad (2.7.5)$$

onde  $\vec{f}n_{vin}^{\parallel}$  é a imagem pela aplicação atrito da componente normal  $\vec{f}n^{\perp}(q, \dot{q}, \ddot{q})$ .



Concluí-se então que o esforço motor requerido nas articulações, para que sejam obtidas as acelerações  $\ddot{q}$  desejadas, pode ser obtido pelo seguinte procedimento:

- (1) Calcular a resultante  $\vec{fn}(q, \dot{q}, \ddot{q})$  como no método iterativo de Newton - Euler.
- (2) Decompor essa resultante segundo a soma direta  $\mathbf{J} = \mathbf{J}_q^{\parallel} \oplus \mathbf{J}_q^{\perp}$ , obtendo  $\vec{fn}^{\parallel} \in \mathbf{J}_q^{\parallel}$  e  $\vec{fn}^{\perp} \in \mathbf{J}_q^{\perp}$  (como método iterativo de Newton - Euler).
- (3) Tomar  $\vec{fn}^{\perp}$  como a componente não dissipativa  $\vec{fn}_{vin}^{\perp}$  da reação vincular e calcular  $\vec{fn}_{vin}^{\parallel}$  segundo os modelos de atrito na sjuntas (seção 4.4).
- (4) Subtrair o atrito vincular  $\vec{fn}_{vin}^{\parallel}$  da componente  $\vec{fn}^{\parallel}$  e obter o esforço motor requerido  $\vec{fn}_{mot} = \vec{fn}^{\parallel} + \vec{fn}_{vin}^{\parallel}$ .

## 2.8. Simulação de Robôs Manipuladores

Para finalizar, é discutida a inclusão dos modelos de atrito (nas articulações) aqui desenvolvidos em um *algoritmo de simulação* do comportamento dinâmico do manipulador. Nesse caso, devem-se supor dados o estado corrente  $(q, \dot{q})$  e os esforços motores  $\vec{fn}_{mot} \in \mathbf{J}_q^{\parallel}$  aplicados, e então calcular as acelerações generalizadas  $\ddot{q}$

correspondentes. Essas acelerações dependem, é claro, do atrito vincular associado às reações.

Foi visto na seção 1.3 como obter uma descrição paramétrica do subespaço afim  $\mathbf{M}_q^J(\overline{v\omega}) \subset \mathbf{J}$  dos esforços mantenedores do estado  $(q, \dot{q})$ . Usando essa descrição, pode-se calcular a aplicação mantenedora desse estado pelos métodos usuais da álgebra linear, pois o subespaço afim  $\mathbf{M}_q^J(\overline{v\omega}) \subset \mathbf{J}$  é o gráfico dessa aplicação  $\mathbf{J}_q^{\parallel} \subset \mathbf{J}$  em  $\mathbf{J}_q^{\perp} \subset \mathbf{J}$ .

Tendo feito isto, pode-se determinar a reação vincular a um esforço motor  $\overrightarrow{fn}_{mot} \in \mathbf{J}_q^{\parallel}$  qualquer pelo seguinte método de aproximação sucessivas:

(1) Calcular a aplicação atrito sobre esse vetor  $\overrightarrow{fn}_{mot} \in \mathbf{J}_q^{\parallel}$  obtendo a reação perfeita  $\overrightarrow{fn}_{vin}^{\perp}(1) \in \mathbf{J}_q^{\perp}$  como uma primeira aproximação da componente não dissipativa da reação vincular procurada.

(2) Calcular a aplicação atrito sobre esse vetor  $\overrightarrow{fn}_{vin}^{\perp}(1) \in \mathbf{J}_q^{\perp}$ , obtendo o vetor  $\overrightarrow{fn}_{vin}^{\parallel}(1) \in \mathbf{J}_q^{\parallel}$  como uma primeira aproximação da componente dissipativa da reação vincular procurada.

(3) Calcular a aplicação mantenedora sobre a soma  $\overrightarrow{fn}_{mot} + \overrightarrow{fn}_{vin}^{\parallel}(1) \in \mathbf{J}_q^{\parallel}$  obtendo assim uma segunda aproximação  $\overrightarrow{fn}_{vin}^{\perp}(2) \in \mathbf{J}_q^{\perp}$  para a componente não dissipativa da reação vincular procurada.

(4) Calcular a aplicação atrito sobre esse vetor  $\vec{fn}_{vin}^\perp(2) \in \mathbf{J}_q^\perp$ , obtendo assim uma segunda aproximação  $\vec{fn}_{vin}^\parallel(2) \in \mathbf{J}_q^\parallel$  para a componente dissipativa da reação vincular procurada.

(5) Calcular a aplicação mantenedora sobre a soma  $\vec{fn}_{mot} + \vec{fn}_{vin}^\parallel(2) \in \mathbf{J}_q^\parallel$ , obtendo assim uma terceira aproximação  $\vec{fn}_{vin}^\perp(3) \in \mathbf{J}_q^\perp$  para a componente não dissipativa da reação vincular procurada

(6) Assim por diante.

Se este procedimento iterativo convergir então podem ser obtidos, com qualquer precisão numérica desejada, dois vetores  $\vec{fn}_{vin}^\parallel \in \mathbf{J}_q^\parallel$  e  $\vec{fn}_{vin}^\perp \in \mathbf{J}_q^\perp$ , tais que:

(i)  $\vec{fn}_{vin}^\perp \in \mathbf{J}_q^\perp$  é a imagem de  $\vec{fn}_{mot} + \vec{fn}_{vin}^\parallel \in \mathbf{J}_q^\parallel$  pela aplicação mantenedora;

e

(ii)  $\vec{fn}_{vin}^\parallel \in \mathbf{J}_q^\parallel$  é a imagem de  $\vec{fn}_{vin}^\perp \in \mathbf{J}_q^\perp$  pela aplicação atrito.

A primeira dessas condições equivale a  $\vec{fn}_{mot} + \vec{fn}_{vin} \in \mathbf{M}_q^J(\vec{v}\omega)$ , pois  $\vec{fn}_{mot} = \vec{00}$ ; enquanto a segunda é equivalente a  $\vec{fn}_{vin} \in \mathbf{A}_q^J(\vec{v}\omega)$ , pois  $\mathbf{A}_q^J(\vec{v}\omega) \subset \mathbf{J}$  é o gráfico da aplicação atrito. Como estas são exatamente as duas condições que determinam a reação vincular ao esforço motor  $\vec{fn}_{mot}$ , conclui-se que essa reação é simplesmente a soma das duas componentes obtidas acima:

$$\vec{fn}_{vin} = \vec{fn}_{vin}^\parallel + \vec{fn}_{vin}^\perp. \quad (2.8.1)$$

Para prever o comportamento dinâmico do manipulador, basta então verificar qual é a aceleração generalizada  $\ddot{\mathbf{q}}$  correspondente ao vetor:

$$\vec{f}\mathbf{n} = \vec{f}\mathbf{n}_{mot} + \vec{f}\mathbf{n}_{vin} \quad (2.8.2)$$

na representação paramétrica do subespaço afim  $\mathbf{M}_q^J(\vec{v}\omega) \subset \mathbf{J}$ .

### 3. Resultados

Este trabalho não tratou de braços flexíveis pois visou, de início, estabelecer um formalismo mais apropriado para corpos rígidos, deixando para desenvolvimentos futuros sua extensão a corpos flexíveis.

O objetivo principal foi introduzir uma nova abordagem matemática para a aplicação do Método Iterativo de Newton - Euler para a solução das equações dinâmicas de um robô manipulador.

O mesmo formalismo forneceu uma melhor maneira para modelar o atrito que age nas juntas de conexão entre cada braço do robô. Esse atrito é normalmente descrito como dependendo apenas das posições e velocidades relativas dos corpos em contato, de acordo com uma lei pré - definida. Tal descrição, entretanto, não é satisfatória em regimes de baixa lubrificação ou numa

outra série de situações, onde a força de atrito pode depender de uma forma bastante complexa da força normal entre as superfícies em contato e do estado do sistema.

O formalismo especial que foi aqui desenvolvido utiliza vetores multidimensionais representando o conjunto de braços de um robô. Como resultado, o Método Iterativo de Newton–Euler foi aplicado para todas as variáveis dinâmicas em conjunto em vez de resolver o problema dinâmico global tratando cada parte separadamente. Foram obtidos assim os momentos e forças resultantes em cada corpo. A seguir foi estabelecido um isomorfismo canônico entre esses esforços resultantes e os esforços trocados em cada junta. Deste isomorfismo decorreu a reação nos pontos de contato, de forma que a força ou torque de atrito, contrária ao movimento de translação ou de rotação na junta foi caracterizada.

#### **4. Discussão**

Não há dúvida que a metodologia desenvolvida contém um formalismo matemático razoavelmente complexo, limitando sua leitura a pessoas que tenham boa uma formação em álgebra linear e geometria diferencial. Por outro lado essa formação se torna cada vez mais desejável para estudantes que desejam fundamentar adequadamente seus trabalhos em dinâmica. Não foi proposto aqui alterar os métodos clássicos do estudo da dinâmica de sistemas, mas apenas foi proposta uma abordagem global para a solução de um problema específico, agregando quantidades cinemáticas e dinâmicas em vetores multidimensionais e tratar simultaneamente essas quantidades em um processo iterativo baseado no método de Newton – Euler. Nesse aspecto, os objetivos do trabalho foram plenamente atingidos, deixando aberta a questão de como estender a metodologia para incluir a flexibilidade dos braços de um robô. É claro que essa flexibilidade é importante para o projeto de um robô, pois tem uma influência direta na repetibilidade de suas operações. A solução desse problema é deixada para trabalhos futuros.

## **5. Conclusão**

O desenvolvimento do trabalho mostra que a nova representação das quantidades cinemática e dinâmicas, que envolvem a dinâmica de robôs manipuladores, contribui para uma maior economia de tempo na aplicação do método iterativo de Newton – Euler, além de permitir uma maior liberdade na escolha do modelo de atrito que atua nas articulações entre os braços de um robô.

## Referências

- ABRAHAM, R. and MARSDEN, J. E. “Foundations of Mechanics”, Benjamin-Cummings, 1982.
- AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY “Differential Geometry, Lie Groups and Symmetric Spaces”, 2001
- AMIROUCHE, F.M.L., Computational Methods in Multibody Dynamics, Prentice-Hall, 1992
- ARNOLD, V. I. Métodos Matemáticos da Mecânica Clássica, Editora Mir, Moscou, 1987.
- ASME International 2001 DETC, Pittsburgh, PA, USA, Sep 9-12, 2001.
- CORTIZO, S. F. “Classical Mechanics – On the Deduction of Lagrange’s Equations”, Reports on Mathematical Physics, 29, n.1, 45-54, 1991.
- CORTIZO, S. F. e GIACAGLIA, G. E. O. “Dynamics of Multibody – A geometric approach”, IME-USP, 1993 (unpublished).
- CRAIG, J “Introduction to Robotics, Addison-Wesley, 1986.
- EBERHARD, P.: SCHIEHLEN, W.: Hierarchical Modeling in Multibody Dynamics. Arch. Appl. Mech. 68 ,1998, pp. 237-246.
- EICH-SOELLNER, E. and FÜHRER, C., Numerical Methods in Multibody Dynamics, Teubner-Verlag, 1990.
- GERARDIN, M. and CARDONA, A. “Flexible Multibody Dynamics: A Finite Element Approach”, John Wiley, 2001
- GIACAGLIA, G.E.O. “Mecânica Analítica”, Almeida Neves, RJ, 1977
- HOLLERBACH, J. M.: “A Recursive Lagrangian Formulation of Manipulator Dynamics and a Comparative Study of Dynamics Formulation Complexity”, in IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, vol. SMC-10, 1980.
- KREYSZIG, E. “Differential Geometry”, Dover Pub., 1991
- LEE, C. G. “Robot Arm Kinematics, Dynamics, and Control”, in Computer, 15, n.12, 62-80,1982.
- LIEBERMANN, P. and MARLE, C. M. “Symplectic Geometry and Analytical Mechanics”, Springer Verlag, 1987
- LUH, J. Y. S., WALKER, M. W. and PAUL, R. P. C. “On-Line Computational Scheme for Mechanical Manipulators”, in Transactions of ASME, Journal Dynamic Systems, Measurement and Control, 102, 69-76, 1980.
- O’NEIL, B. “Elementary Differential Geometry”, Academic Press, 2<sup>nd</sup> Edition, 1997, 482 pp.
- ORIN, D. E. Orin, McGHEE, R. B., VUKOBRATOVIC, M. and HARTOCH, G. “Kinematic and Kinetic Analysis of Open-Chain Linkages Utilizing Newton-Euler Methods”, in Mathematical Biosciences, 43, 107-130, 1979.
- PFEIFFER, F. and GLOCKER, C., Multi-Body Dynamics with Unilateral Contacts, John Wiley & Sons, 1996.
- SCHIEHLEN, W., (ed.) Multibody Systems Handbook, Springer-Verlag,1990.
- SCHIEHLEN, W., Multibody System Dynamics: Roots and Perspectives, Multibody System Dynamics, 1, 1997, pp 149-188.

- SCHIEHLEN, W.; RÜKGAUER, A.; SCHIRLE, Th.: Force Coupling Versus Differential Algebraical Description of Constrained Multibody Systems. *Multibody System Dynamics* 4, 2000, pp. 317-340.
- SCHILLING, R. J. “Fundamentals of Robotics”, Prentice Hall, NJ, 1990
- SCIAVICCO, L. and SICILIANO, B. “Modeling and Control of Robot Manipulators”, Springer Verlag, 2000
- SHABANA, A.A., *Dynamics of Multibody Systems*, John Wiley & Sons, 1989.
- SHABANA, A.A., Flexible Multibody Dynamics: Review of Past and Recent Developments, in *Multibody System Dynamics*, 1, 1997, pp 189-222.
- SILVER, W. “On the Equivalence of Lagrangian and Newton-Euler Dynamics for Manipulators”, in *International Journal of Robotics Research*, vol. 1, N° 2, 60-70, 1982.
- SPONGE, M. W. and VIDYASAGAR, M. “Robot Dynamic and Control”, John Wiley and Sons, 1989
- WALKER, M. W. and ORIN, D. E. “Efficient Dynamic Computer Simulation of Robotic Mechanisms”, in *Transactions of ASME, Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, 104, 205 – 211, 1982.



