

UNIVERSIDADE DE TAUBATÉ

Matheus Romero

**ANÁLISE MATRICIAL DE ESTRUTURAS VIA
ROTINAS COMPUTACIONAIS PROGRAMADAS
EM MATLAB**

Taubaté - SP

2017

Matheus Romero

**ANÁLISE MATRICIAL DE ESTRUTURAS VIA
ROTINAS COMPUTACIONAIS PROGRAMADAS
EM MATLAB**

Trabalho de graduação apresentado para obtenção do Certificado de Bacharel pelo Curso Engenharia Aeronáutica do Departamento de Engenharia Mecânica da Universidade de Taubaté,

Área de Concentração: Engenharia/
Engenharia Aeronáutica/ Estruturas.

Orientador: Prof. Msc. Gilvan Cesar de Castro Corread.

Taubaté - SP

2017

**Ficha Catalográfica elaborada pelo SIBi – Sistema Integrado
de Bibliotecas / UNITAU - Biblioteca das Engenharias**

R763a Romero, Matheus
Análise matricial de estruturas via rotinas computacionais
programadas em Matlab. / Matheus Romero. - 2017.

54f. : il; 30 cm.

Monografia (Graduação em Engenharia Aeronáutica) –
Universidade de Taubaté. Departamento de Engenharia
Mecânica e Elétrica, 2017
Orientador: Prof. Me Gilvan César de Castro Correard,
Departamento de Engenharia Mecânica e Elétrica.

1. Análise estrutural. 2. Métodos de deslocamentos. 3.
Rotinas computacionais. I. Título.

MATHEUS ROMERO
ANÁLISE MATRICIAL DE ESTRUTURAS VIA ROTINAS COMPUTACIONAIS
PROGRAMADAS EM MATLAB

Trabalho de graduação apresentado para obtenção do Certificado de Bacharel pelo Curso Engenharia Aeronáutica do Departamento de Engenharia Mecânica da Universidade de Taubaté,

Área de Concentração: Engenharia/
Engenharia Aeronáutica/Estruturas

Data: 29.09.2017

Resultado: APROVADO

BANCA EXAMINADORA

Prof. Msc. Gilvan Cesar de Castro Correard - Universidade de Taubaté

Assinatura _____

Prof. Msc. Antônio Carlos Tonini - Universidade de Taubaté

Assinatura _____

RESUMO

Os projetos e análises estruturais requerem agilidade na etapa de cálculo, sendo no fornecimento de resultados com um elevado nível de confiança. A necessidade de velocidade e acuracidade para obtenção dos resultados, faz com que existam múltiplos métodos de análise e formas de implementação. Dentre os métodos existentes, os métodos matriciais, divididos em método dos deslocamentos e das forças, são baseados na concepção e substituição de estruturas contínuas por modelos matemáticos, etapa que é conhecida como idealização estrutural. De maneira geral, a análise estrutural tem como objetivo a determinação de deslocamentos, forças externas e internas da estrutura, deformações e tensões, para múltiplos casos de carregamento. O presente trabalho aborda o método dos deslocamentos com ênfase na formulação de elementos unidimensionais, vigas, barras e molas, sendo com aplicação e desenvolvimento de rotinas computacionais que possam substituir o uso de softwares comerciais. Exemplos de estruturas são analisados e seus resultados são verificados com a literatura e o software comercial Msc Nastran para fins de validação da formulação e implementação das rotinas computacionais.

Palavras chave: Análise Estrutural, Método dos Deslocamentos, Rotinas Computacionais.

ABSTRACT

The projects and structural analysis require agility on the step of calculus, being in providing results with a high level of reliability. The necessity of velocity and accuracy to obtain the results, makes the existence of multiple methods of analysis and forms of implementation. Among the existing methods, the matrix methods, divides in displacement and force methods, are based on conception and substitution of continues structures for mathematics models, step that é knowledge as structural idealization. In general, the structural analysis has as objective the determination of displacement, external and internal forces of the structure, deformation and stress, for multiple cases of loading. The present work deals with displacement methods with emphasis on formulation of unidimensional elements, frames, trusses and springs, with and application and development of computational routines that can replace commercial software uses. Examples of structures are analyzed and their results are verified with literature and commercial software MSC Nastran for validation and implementation of computational routines.

Keywords: Structural Analyze, Displacement Method, Computational Routines.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Métodos de análise estrutural	11
Figura 2 – Elemento de mola	12
Figura 3 – Elemento de barra.....	13
Figura 4 – Elemento de viga.....	13
Figura 5 – Deslocamento dos nós. (a) Treliça formada por barra - (b) Pórtico plano formado por vigas.....	14
Figura 6 – Estrutura com coordenada global e elemento com coordenada local	15
Figura 7 – Relação dos cossenos diretores com o eixo x	16
Figura 8 – Elemento de barra orientado no espaço	19
Figura 9 – Elemento de viga.....	21
Figura 10 – Modelo de estrutura com elementos unidimensionais.....	23
Figura 11 – Fluxograma básico da programação	30
Figura 12 – Entrada de dados – sistemas de coordenadas	31
Figura 13 – Entrada de dados – materiais	32
Figura 14 – Entrada de dados – propriedades	32
Figura 15 – Entrada de dados – nós	33
Figura 16 – Entrada de dados – elementos	34
Figura 17 – Entrada de dados – cargas nos nós.....	34
Figura 18 – Entrada de dados – cargas nos elementos	34
Figura 19 – Entrada de dados – condições de contorno	35
Figura 20 – Montagem da matriz de rigidez global.....	36
Figura 21 – Resolução de sistema linear	37
Figura 22 – Reações de apoio	37
Figura 23 – Treliça espacial	38
Figura 24 – Entrada de dados para treliça espacial	39
Figura 25 – Forma deformada da treliça espacial	40
Figura 26 – Resultados da análise	40
Figura 27 – Viga em balanço.....	42
Figura 28 – Seção transversal da viga.	42
Figura 29 – Entrada de dados para viga em balanço.....	43
Figura 30 - Modelo utilizado na análise. (A) Elementos e nós – (B) Carregamento e condição de contorno.	46
Figura 31 – Entrada de dados - coordenadas, materiais e propriedades.....	46
Figura 32 – Entrada de dados - nós	47
Figura 33 – Entrada de dados - Elementos.....	47
Figura 34 – Entrada de dados - carregamento.....	48
Figura 35 – Entrada de dados - condição de contorno.....	48
Figura 36 – Estrutura deformada.....	49
Figura 37 – Resultado da análise.....	50
Figura 38 - AUTOSPC MSC Nastran	51
Figura 39 - AUTOSPC Programa Matlab	51

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Graus de liberdade dos elementos.....	18
Tabela 2 – Dados de entrada do elemento de viga.....	21
Tabela 3 – Comparação de deslocamento para treliça espacial.....	41
Tabela 4 – Comparação de tensão para treliça espacial.....	41
Tabela 5 – Dados da seção transversal.....	42
Tabela 6 – Resultados numéricos.....	44
Tabela 7 – Comparação deslocamento nó 7.....	51
Tabela 8 – Comparação deslocamento nó 9.....	51

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	9
1.1	Justificativa.....	9
1.2	Objetivos geral e específico	9
1.2.1	Objetivos geral.....	10
1.2.2	Objetivo específico	10
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	11
2.1	Métodos de análise	11
2.2	Idealização estrutural	12
2.2.1	Elementos unidimensionais	12
2.3	Graus de liberdade.....	13
2.4	Métodos dos deslocamentos.....	14
2.5	Sistema de coordenadas.....	15
2.5.1	Transformação de sistemas de coordenadas.....	15
2.5.2	Transformação do deslocamentos, força e rigidez	16
2.6	Graus de liberdade dos elementos	17
2.7	Elemento de mola	18
2.7.1	Matriz de rigidez local	18
2.7.2	Matriz de transformação	19
2.8	Elemento de barra.....	19
2.8.1	Matriz de rigidez local	20
2.8.2	Matriz de transformação	20
2.9	Elemento de viga	21
2.9.1	Matriz de rigidez local	21
2.9.2	Matriz de transformação	22
2.10	Montagem da matriz de rigidez.....	22
2.10.1	Dimensão da matriz de rigidez	25
2.11	Carregamento	26
2.12	Condição de contorno	27
2.12.1	Deslocamentos ativos e prescritos.....	27
2.12.2	Condensação estática.....	28
3	METODOLOGIA	30
3.1	Programação computacional.....	30
3.2	Entrada de dados	31
3.2.1	Sistema de coordenadas (coordSystem).....	31
3.2.2	Materiais (material)	31

3.2.3	Propriedades (property).....	32
3.2.4	Nós (node).....	33
3.2.5	Elementos (element).....	33
3.2.6	Cargas na estrutura (nodeLoad e elementLoad)	34
3.2.7	Condição de contorno (boundary)	35
3.2.8	Estrutura de dados	35
3.3	Montagem das matrizes	36
3.4	Obtenção dos resultados	37
3.4.1	Deslocamentos prescritos	37
3.4.2	Reações de apoio.....	37
4	PROBLEMA ESTRUTURAL	38
4.1	Análise de uma treliça espacial.....	38
4.1.1	Entrada de dados	39
4.1.2	Resultados.....	40
4.1.3	Comparação dos resultados.....	41
4.2	Viga no plano	41
4.2.1	Entrada de dados	43
4.2.2	Resultados.....	44
4.2.3	Comparação dos resultados.....	44
4.3	Múltiplos elementos.....	45
4.3.1	Entrada de dados	46
4.3.2	Resultados.....	49
4.3.3	Comparação dos resultados.....	51
5	CONCLUSÃO	53
6	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	54

1 INTRODUÇÃO

1.1 Justificativa

Os projetos estruturais requerem agilidade na etapa de análise, sendo no fornecimento de resultados com um elevado nível de confiança. De maneira geral, a análise estrutural tem como objetivo a determinação de deslocamentos, forças externas e internas da estrutura, deformações e tensões, para múltiplos casos de carregamento.

A necessidade de velocidade e acuracidade para obtenção dos resultados, faz com que existam múltiplos métodos de análise e formas de implementação. Dentre os métodos existentes, os métodos matriciais são baseados na concepção e substituição de estruturas contínuas por modelos matemáticos, etapa que é conhecida como idealização estrutural.

Os métodos matriciais são divididos em dois grupos, método dos deslocamento e método das forças, onde requerem a utilização de álgebra matricial para resolução da equação de equilíbrio.

Devido à complexidade estrutural e dimensão das matrizes utilizadas, é necessário a utilização de ferramentas computacionais, sendo programas comerciais de elementos finitos, como MSC Nastran e Femap, ou a programação de rotinas computacionais, em ambientes como Matlab e Octave.

O custo envolvendo a aquisição de programas comerciais para análise estrutural pode ser elevado, portanto o desenvolvimento de rotinas computacionais pode se tornar uma alternativa viável, desde que a correta implementação da metodologia e validação dos resultados seja realizada.

1.2 Objetivos geral e específico

Para uma melhor leitura e interpretação deste trabalho, é necessário distinguir o objetivo geral e o objetivo específico.

1.2.1 Objetivos geral

O objetivo geral deste trabalho é aplicar o método dos deslocamentos em análises estruturais, utilizando-se de rotinas computacionais elaboradas.

Os resultados obtidos serão verificados com a literatura e um programa comercial de elementos finitos.

1.2.2 Objetivo específico

- Aplicar o método dos deslocamentos em análises estruturais estáticas em um espaço tridimensional.
- Elaborar e programar rotinas computacionais em ambiente Matlab, com base no método dos deslocamentos.
- Determinar deslocamentos, esforços e reações de apoio, obtidos através da idealização estrutural e implementação das rotinas computacionais elaboradas e programadas.
- Verificar os resultados obtidos através das rotinas computacionais com a literatura e o programa comercial MSC Nastran.

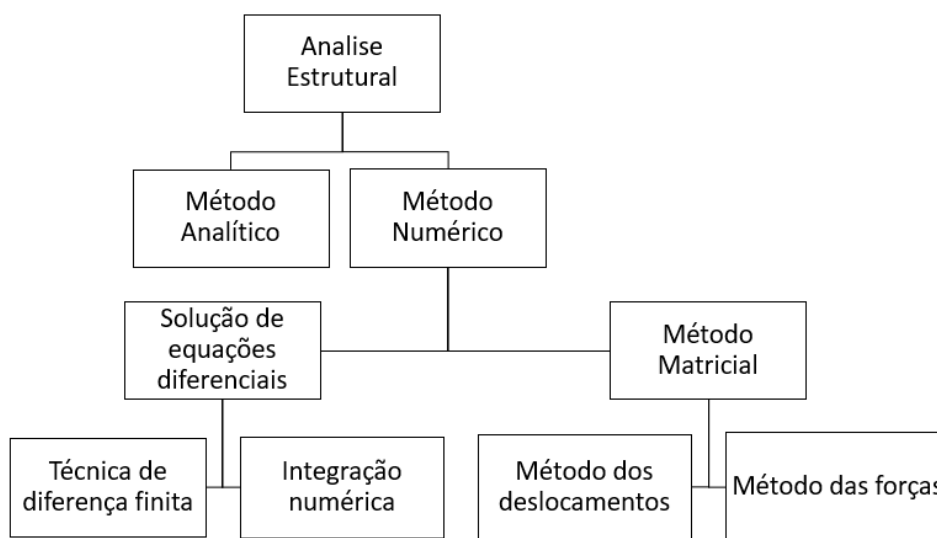
2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1 Métodos de análise

Os métodos de análise estrutural são divididos em dois grupos, métodos analíticos e métodos numéricos, Figura 1. As limitações dos métodos analíticos são conhecidas. Para estruturas com configurações simples, soluções aproximadas podem ser encontradas, mas para estruturas com configurações complexas, métodos analíticos não podem ser utilizados e o método numérico deve ser aplicado.

O método numérico de análise estrutural é subdividido em dois tipos, solução numérica de equações diferenciais para deslocamento ou tensão e método matricial baseado na idealização estrutural e discretização de elementos.

Figura 1 – Métodos de análise estrutural



Fonte: Premieniecki (1968).

Por sua vez o método matricial possui dois complementos: o método do deslocamento (método da rigidez), onde os deslocamentos são desconhecidos, e o método da força (método da flexibilidade), onde as forças são desconhecidas (MCGUIRE, GALLANGHER, & ZIEMIAN, 1999) (PREMIENIECKI, 1968).

Desta forma, este capítulo tem como objetivo definir conceitos fundamentais relacionados à análise matricial de estruturas, utilizando-se do método do deslocamento aplicado em estruturas unidimensionais sujeitas a cargas estáticas.

2.2 Idealização estrutural

Para permitir análise, a estrutura deve ser idealizada. Membros que possuam largura, profundidade e comprimento, são convencionalmente reduzidas a elementos menores. Sua resistência a deformação é representada por propriedades do material como Módulo Young e Coeficiente de Poisson e por propriedades geométricas da seção transversal, como área, momento de inércia a flexão, e momento de inércia a torção (MCGUIRE, GALLANGHER, & ZIEMIAN, 1999).

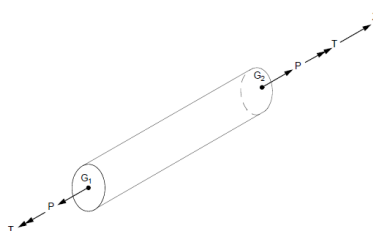
As estruturas são montadas por elementos estruturais conectados entre si por pontos discretos ou contínuos.

Em análise matricial as estruturas contínuas são normalmente representadas por um modelo discreto composto de nós e elementos. Os elementos representam uma parcela da estrutura, que em geral se repete em outras regiões. A interligação entre os elementos adjacentes é feita através de pontos discretos chamados de nós (PREMIENIECKI, 1968).

2.2.1 Elementos unidimensionais

Elemento de mola, Figura 2, apresentado nesse trabalho possui rigidez nos 6 graus de liberdade. Ele define um elemento de tensão, compressão e torção (MSC SOFTWARE, 2012).

Figura 2 – Elemento de mola



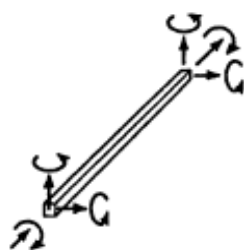
Fonte: Msc Software (2012).

Elemento de barra, Figura 3, é um elemento estrutural simples. Esse elemento não possui rigidez a flexão e torção e possui a distribuição de tensão e deformação em apenas uma dimensão, axial (PREMIENIECKI, 1968).

Figura 3 – Elemento de barra

Fonte: Premieniecki (1968).

O elemento de viga, Figura 4, possui rigidez axial, flexão e a torção, portanto para um espaço tridimensional esse elemento possuiu quatro forças de cisalhamento, duas cargas axiais, quatro momentos de flexão e dois momentos torcionais. Todas as forças estão atuando nas extremidades do elemento. (PREMIENIECKI, 1968)

Figura 4 – Elemento de viga

Fonte: Premieniecki (1968).

2.3 Graus de liberdade

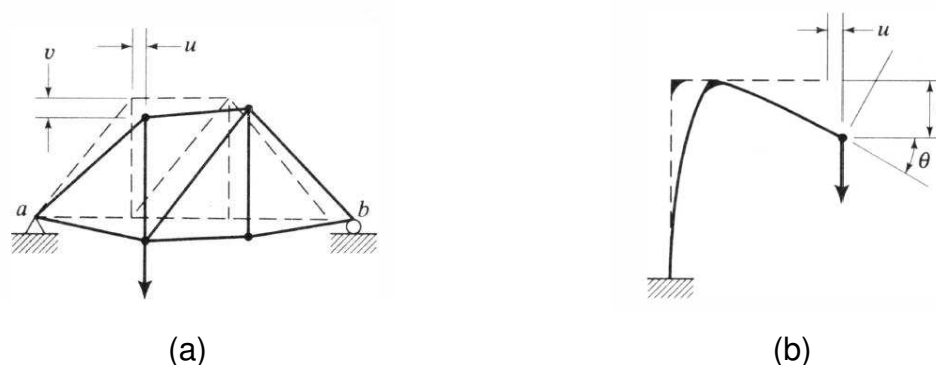
Componentes de deslocamento requerem a definição de condições de contorno. Em estruturas articuladas, formada por barras, convenientemente chama de treliça, Figura 5 - a, o membro é tracionado e comprimido pela carga aplicada. Exceto nos suportes, ou os nós que são restringidos, o movimento de cada nó pode ser descrito por dois deslocamentos de translação, ditos como u e v , Figura 5 - a.

Já em elementos de viga, para completar a definição do deslocamento para uma viga no plano, além dos movimentos de translação, apresentam deslocamentos de rotação, θ .

Cada componente de deslocamento apresentado na Figura 5 – b, é um grau de liberdade do elemento de viga no plano. Em princípio, o número de graus de liberdade,

GDL, de um sistema é o número de componentes de deslocamento ou coordenadas necessárias para definir a posição de um corpo no espaço (MCGUIRE, GALLANGHER, & ZIEMIAN, 1999).

Figura 5 – Deslocamento dos nós. (a) Treliça formada por barra - (b) Pórtico plano formado por vigas



Fonte: Mcguire, Gallangher e Ziemian (1999).

2.4 Métodos dos deslocamentos

A etapa fundamental para aplicação do método dos deslocamentos é a determinação da matriz de rigidez característica dos elementos estruturais dentro da idealização estrutural proposta na análise (PREMIENIECKI, 1968).

O método do deslocamento é formulado através da equação de equilíbrio, que pode ser expressa por um sistema de equações lineares, no sistema global, apresentado na forma matricial na equação (1).

$$[K] \cdot \{U\} = \{F\} \quad (1)$$

A matriz de rigidez \$[K]\$, relaciona em coordenada global do sistema \$(x, y, z)\$ os deslocamentos nodais \$\{U\}\$ com forças globais \$\{F\}\$ de toda a estrutura.

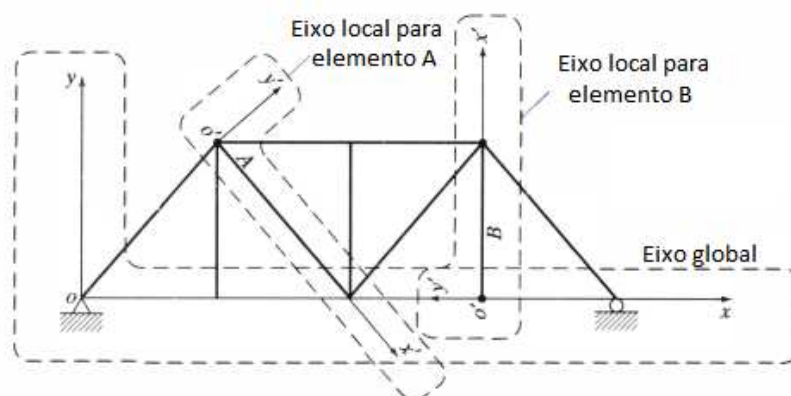
A equação de equilíbrio poder ser expressa em termos no sistema de coordenadas locais do elemento, equação (2), onde a matriz de rigidez \$[\hat{k}]\$, relaciona em coordenada local do sistema \$(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})\$ o deslocamento nodal \$\{\hat{u}\}\$ com forças locais \$\{\hat{f}\}\$ (LOGAN, 2007).

$$[\hat{k}] \cdot \{\hat{u}\} = \{\hat{f}\} \quad (2)$$

2.5 Sistema de coordenadas

Normalmente as estruturas são definidas em um sistema de coordenada global (x, y, z) , e os elementos estruturais são definidos em um sistema local de coordenadas $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$, Figura 6. Em outras palavras, os deslocamentos, forças e rigidez dos elementos possuem um sistema local e um sistema global de referência (MCGUIRE, GALLANGHER, & ZIEMIAN, 1999).

Figura 6 – Estrutura com coordenada global e elemento com coordenada local

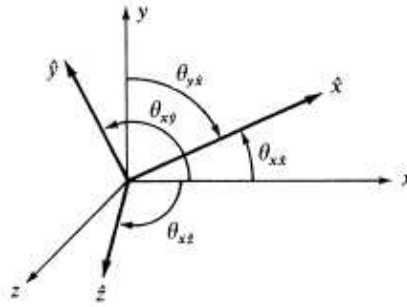


Fonte: Mcguire, Gallanher e Ziemian (1999).

2.5.1 Transformação de sistemas de coordenadas

A relação entre as coordenadas locais e globais, equação (3), apresentada na Figura 7, é feita através da matriz $[R]$, de dimensões 3×3 . Esta matriz é conhecida como matriz de cossenos diretores, equação (4) (LOGAN, 2007).

Figura 7 – Relação dos cossenos diretores com o eixo x



Fonte: Logan (2007).

$$\{v_{local}\} = [R] \cdot \{v_{global}\} \quad (3)$$

$$[R] = \begin{bmatrix} (\hat{i}_{local} \cdot \hat{i}_{global}) & (\hat{i}_{local} \cdot \hat{j}_{global}) & (\hat{i}_{local} \cdot \hat{k}_{global}) \\ (\hat{j}_{local} \cdot \hat{i}_{global}) & (\hat{j}_{local} \cdot \hat{j}_{global}) & (\hat{j}_{local} \cdot \hat{k}_{global}) \\ (\hat{k}_{local} \cdot \hat{i}_{global}) & (\hat{k}_{local} \cdot \hat{j}_{global}) & (\hat{k}_{local} \cdot \hat{k}_{global}) \end{bmatrix} \quad (4)$$

2.5.2 Transformação do deslocamentos, força e rigidez

Segundo Premieniecki (1968), as relações de deslocamento, força e rigidez entre o sistema local e global são descritas pelas equações equação (5) a (9).

Temos que a relação entre o sistema local e global para o deslocamento, equação (5), e para forças, equação (6), expresso em termos de uma matriz de transformação $[T]$.

$$\{\hat{u}\} = [T] \cdot \{U\} \quad (5)$$

$$\{\hat{f}\} = [T] \cdot \{F\} \quad (6)$$

Como a matriz $[K]$ é inicialmente calculada no sistema local de coordenadas, $[\hat{k}]$, é necessário que seja realizada uma transformação matricial, mudando o sistema de referência do local para o global, equação (7) a (9).

Temos a equação de equilíbrio no sistema local, equação (2), e substituindo as

equação (5) e (6) na equação (2) temos a equação (7) e (8).

$$[\hat{k}] \cdot [T] \cdot \{U\} = [T] \cdot \{F\} \quad (7)$$

$$[T]^{-1} \cdot [\hat{k}] \cdot [T] \cdot \{U\} = \{F\} \quad (8)$$

Portanto, da equação (8), podemos dizer que a matriz de rigidez global é dada pela equação (9).

$$[K] = [T]^t \cdot [\hat{k}] \cdot [T] \quad (9)$$

Para um elemento com dois nós e seis graus de liberdade por nó, sendo três para translação e três para rotação, temos uma matriz de transformação $[T]$ formada por quatro matrizes $[R]$ em sua diagonal principal, equação (10).

$$[T] = \begin{matrix} & T_1 & R_1 & T_2 & R_2 \\ \begin{matrix} [R] \\ [0] \\ [0] \\ [0] \end{matrix} & \begin{matrix} [0] \\ [R] \\ [0] \\ [0] \end{matrix} & \begin{matrix} [0] \\ [R] \\ [R] \\ [0] \end{matrix} & \begin{matrix} [0] \\ [0] \\ [0] \\ [R] \end{matrix} \end{matrix} \Bigg]_{12 \times 12} \quad (10)$$

A matriz de rotação $[T]$, utilizada na transformação da matriz de rigidez do sistema local para o global, possui dimensões características para cada tipo de elemento, uma vez que cada elemento possui um determinado número de graus de liberdade.

2.6 Graus de liberdade dos elementos

No espaço tridimensional, cada nó possui 6 GDL sendo eles 3 para translação e 3 para rotação. O número de graus de liberdade presentes nos elementos abordados neste trabalho é dado na Tabela 1 (LOGAN, 2007) (MSC SOFTWARE, 2012).

Cada elemento possui uma característica em relação a quantidade dos graus de liberdade, por exemplo, uma barra no espaço tridimensional utiliza apenas as componentes de translação (LOGAN, 2007).

Tabela 1 – Graus de liberdade dos elementos

Elemento	Nº de Nós	d_x	d_y	d_z	ϕ_x	ϕ_y	ϕ_z	Nº de GDL
Mola	2	X	X	X	X	X	X	12
Barra	2	X	X	X	-	-	-	6
Viga	2	X	X	X	X	X	X	12

Fonte: Próprio autor.

A matriz de rigidez do elemento é mostrada na seção de cada elemento.

2.7 Elemento de mola

Elemento de mola, apresentado nesse trabalho apresenta rigidez nos 6 Graus de Liberdade. Ele define componente de um elemento capaz de trabalhar em tensão, compressão e torção (MSC SOFTWARE, 2012).

2.7.1 Matriz de rigidez local

A matriz de rigidez local do nó do elemento de mola é definida na equação (11), consecutivamente a matriz de rigidez do elemento é apresentado na equação (12).

$$[\hat{k}_{node}] = \begin{bmatrix} \hat{d}_x & \hat{d}_y & \hat{d}_z & \hat{\theta}_x & \hat{\theta}_y & \hat{\theta}_z \\ k_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_{rotx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_{roty} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{rotz} \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$[\hat{k}] = \begin{bmatrix} [\hat{k}_{node}] & -[\hat{k}_{node}] \\ -[\hat{k}_{node}] & [\hat{k}_{node}] \end{bmatrix} \quad (12)$$

Onde k_x , k_y e k_z são propriedades de rigidez de translação e k_{rotx} , k_{roty} e k_{rotz} são propriedades de rigidez de rotação (MSC SOFTWARE, 2012).

2.7.2 Matriz de transformação

Como o elemento abordado possui componentes em todos os eixos do sistema tridimensional, se faz necessária a transformação de todas as coordenadas locais para globais, assim uma matriz de transformação $[T]$, na dimensão (12x12) é utilizada, respeitando a equação (9).

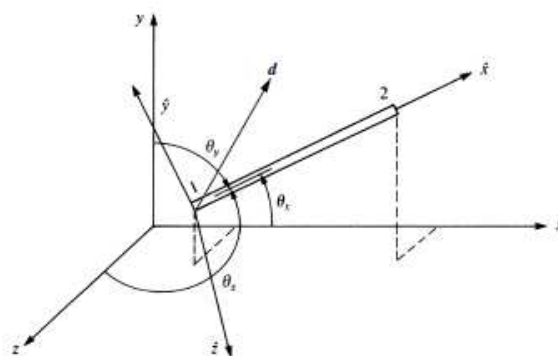
A matriz de transformação $[T]$, para elementos de mola pode ser vista na equação (13) (LOGAN, 2007).

$$[T]_{12 \times 12} = \begin{bmatrix} [R]_{3 \times 3} & [0]_{3 \times 3} & [0]_{3 \times 3} & [0]_{3 \times 3} \\ [0]_{3 \times 3} & [R]_{3 \times 3} & [0]_{3 \times 3} & [0]_{3 \times 3} \\ [0]_{3 \times 3} & [0]_{3 \times 3} & [R]_{3 \times 3} & [0]_{3 \times 3} \\ [0]_{3 \times 3} & [0]_{3 \times 3} & [0]_{3 \times 3} & [R]_{3 \times 3} \end{bmatrix} \quad (13)$$

2.8 Elemento de barra

Elemento de barra são elementos unidimensionais que trabalham apenas com cargas e deformações axiais. A Figura 8 apresenta um elemento de treliça no espaço (LOGAN, 2007).

Figura 8 – Elemento de barra orientado no espaço



Fonte: Logan (2007).

2.8.1 Matriz de rigidez local

O elemento de barra possui apenas deformação em seu eixo axial, portanto apresenta uma matriz de rigidez, equação (14), com componentes apenas nos graus de liberdade axiais.

Para definição da Rigidez do elemento, equação (15), são utilizadas características geométricas e do material.

$$[\hat{k}] = k * \begin{bmatrix} \hat{d}_{1x} & \hat{d}_{2x} \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \hat{d}_{1x} \\ \hat{d}_{2x} \end{matrix} \quad (14)$$

Onde k, equação (15), leva em consideração os parâmetros como área da seção transversal (A), módulo de elasticidade (E) e comprimento do elemento (L) (LOGAN, 2007).

$$k = \frac{AE}{L} \quad (15)$$

2.8.2 Matriz de transformação

Para que se possa efetuar a análise do elemento no espaço tridimensional, é necessário efetuar a transformação da matriz de rigidez do sistema local para o sistema global, como mostrado na equação (9).

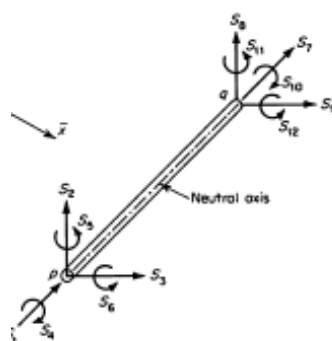
A matriz $[T]$ utilizada para transformação do sistema local para o sistema global é apresentada na equação (16), onde são consideradas apenas as informações de translação do espaço tridimensional (LOGAN, 2007).

$$[T] = \begin{bmatrix} Cx & Cy & Cz & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Cx & Cy & Cz \end{bmatrix} \quad (16)$$

2.9 Elemento de viga

Vigas são elementos unidimensionais em que as componentes de deformação axial, torção e flexão são consideradas, Figura 9 (LOGAN, 2007).

Figura 9 – Elemento de viga



Fonte: Premieniecki (1968).

2.9.1 Matriz de rigidez local

A matriz de rigidez local do elemento de viga espacial com 2 nós possui dimensões (12x12), sendo 3 componentes de translação e 3 de rotação por nó.

Para o cálculo da matriz de rigidez, equação (17), local do elemento é necessário a entrada de dados das características geométricas e do material utilizado, Tabela 2 (LOGAN, 2007).

Tabela 2 – Dados de entrada do elemento de viga

A	Área da Secção Transversal
L	Comprimento do Elemento
J	Momento Polar de Inércia
I_z	Momento de Inércia de Área no Eixo Z
I_y	Momento de Inércia de Área no Eixo Y
E	Modulo de Elasticidade Longitudinal
G	Modulo de Elasticidade Transversal

Fonte: Próprio autor.

A matriz de rigidez local do elemento é apresentada na equação (17).

$$[k] = \begin{bmatrix} \frac{AE}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{AE}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12AEI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & -\frac{12AEI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{12AEI_y}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{12AEI_y}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{GJ}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{4EI_y}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{2EI_y}{L} & 0 \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{L} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_z}{L} \\ -\frac{AE}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{AE}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12AEI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & \frac{12AEI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & 0 & -\frac{12AEI_y}{L^3} & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{12AEI_y}{L^3} & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{GJ}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{2EI_y}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{4EI_y}{L} & 0 \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_z}{L} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{L} \end{bmatrix} \quad (17)$$

2.9.2 Matriz de transformação

Como o elemento abordado possui componentes em todos os eixos do sistema tridimensional, se faz necessária a transformação de todas as coordenadas locais para globais, assim uma matriz de transformação $[T]$, na dimensão (12x12) é utilizada, respeitando a equação (9) (LOGAN, 2007).

A matriz de transformação $[T]$, para elementos de viga pode ser vista na equação (18).

$$[T]_{12 \times 12} = \begin{bmatrix} [R]_{3 \times 3} & [0]_{3 \times 3} & [0]_{3 \times 3} & [0]_{3 \times 3} \\ [0]_{3 \times 3} & [R]_{3 \times 3} & [0]_{3 \times 3} & [0]_{3 \times 3} \\ [0]_{3 \times 3} & [0]_{3 \times 3} & [R]_{3 \times 3} & [0]_{3 \times 3} \\ [0]_{3 \times 3} & [0]_{3 \times 3} & [0]_{3 \times 3} & [R]_{3 \times 3} \end{bmatrix} \quad (18)$$

2.10 Montagem da matriz de rigidez

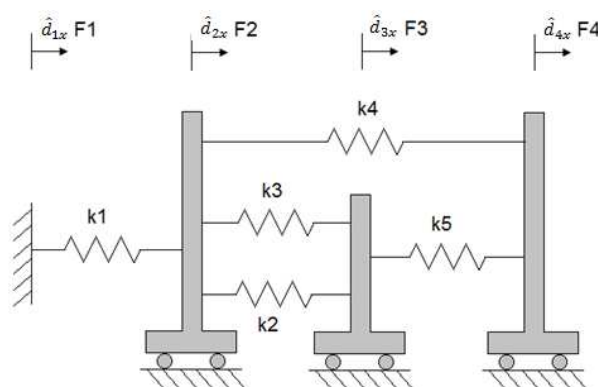
Como exemplo para montagem da matriz de rigidez da estrutura, temos um exemplo retirado de Bathe (1982).

Para que seja montada a matriz de rigidez da estrutura, $[K]$, é necessário que as matrizes de rigidez dos elementos estejam no sistema global. A transformação é feita conforme a equação (9).

Para obtermos a matriz de rigidez global da estrutura, cada matriz de rigidez global do elemento é adicionada de acordo com sua conectividade presente na estrutura.

A Figura 10 apresenta uma estrutura composta por 5 elementos, sendo eles molas lineares com rigidez axial.

Figura 10 – Modelo de estrutura com elementos unidimensionais



Fonte: Bathe (1982).

Como o modelo estudado é unidimensional, sabemos que cada nó apresenta 1 grau de liberdade, portanto como o elemento apresenta 2 nós o mesmo terá 2 graus de liberdade, sendo assim a matriz de rigidez local do elemento, $[\hat{k}_e]$, possui dimensão 2×2 .

Podemos notar que os elementos são conectados em 4 pontos na estrutura, denominados nós, assim conclui-se que a matriz de rigidez global da estrutura, $[K]$, é uma matriz 4×4 , sendo que as dimensões são definidas em relação aos graus de liberdade de cada nó e a quantidade do mesmo na estrutura.

A matriz de rigidez global da estrutura é criada de forma que os graus de liberdade do elemento estejam nos graus de liberdade da matriz de rigidez global.

Assim, o primeiro elemento, que é ligado nos nós 1 e 2, tem a matriz rigidez local apresentada na equação (19), é adicionado na matriz de rigidez global de estrutura nas posições dos graus de liberdade dos nós 1 e 2 da estrutura, equação (20).

$$[\hat{k}_e] = \begin{matrix} & \hat{d}_{1x} & \hat{d}_{2x} \\ \hat{d}_{1x} & & \\ \hat{d}_{2x} & & \end{matrix} \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$[K] = \begin{matrix} & d_{1x} & d_{2x} & d_{3x} & d_{4x} \\ d_{1x} & & & & \\ d_{2x} & & & & \\ d_{3x} & & & & \\ d_{4x} & & & & \end{matrix} \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 & 0 \\ -k_1 & k_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (20)$$

O Segundo elemento é ligado ao nó 2 e 3 da estrutura, tem sua matriz de rigidez local do elemento apresentada na equação (21), é adicionado nos respectivos graus de liberdade dos respectivos nós, equação (22).

$$[\hat{k}_e] = \begin{matrix} & \hat{d}_{2x} & \hat{d}_{3x} \\ \hat{d}_{2x} & & \\ \hat{d}_{3x} & & \end{matrix} \begin{bmatrix} k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \quad (21)$$

$$[K] = \begin{matrix} & d_{1x} & d_{2x} & d_{3x} & d_{4x} \\ d_{1x} & & & & \\ d_{2x} & & & & \\ d_{3x} & & & & \\ d_{4x} & & & & \end{matrix} \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 & 0 \\ -k_1 & (k_1 + k_2) & -k_2 & 0 \\ 0 & -k_2 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (22)$$

Seguindo o mesmo procedimento, o terceiro elemento é conectado aos nós 2 e 3 da estrutura, equação (23), assim são somados nos graus de liberdade dos nós 2 e 3 na matriz de rigidez global da estrutura, equação (24).

$$[\hat{k}_e] = \begin{matrix} & \hat{d}_{2x} & \hat{d}_{3x} \\ \hat{d}_{2x} & & \\ \hat{d}_{3x} & & \end{matrix} \begin{bmatrix} k_3 & -k_3 \\ -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \quad (23)$$

$$[K] = \begin{matrix} & d_{1x} & d_{2x} & d_{3x} & d_{4x} \\ d_{1x} & & & & \\ d_{2x} & & & & \\ d_{3x} & & & & \\ d_{4x} & & & & \end{matrix} \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 & 0 \\ -k_1 & (k_1 + k_2 + k_3) & (-k_2 - k_3) & 0 \\ 0 & (-k_2 - k_3) & (k_2 + k_3) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (24)$$

O quarto elemento é conectado aos nós 2 e 4 da estrutura, equação (25), assim são somados nos graus de liberdade dos nós 2 e 4 na matriz de rigidez global da estrutura, equação (26).

$$[\hat{k}_e] = \begin{matrix} & \hat{d}_{2x} & \hat{d}_{4x} \\ \hat{d}_{2x} & \begin{bmatrix} k_4 & -k_4 \\ -k_4 & k_4 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (25)$$

$$[K] = \begin{matrix} & d_{1x} & d_{2x} & d_{3x} & d_{4x} \\ d_{1x} & \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & (k_1 + k_2 + k_3 + k_3) \end{bmatrix} & (-k_2 - k_3) & 0 \\ d_{2x} & & (k_2 + k_3) & -k_4 \\ d_{3x} & 0 & & 0 \\ d_{4x} & 0 & -k_4 & k_4 \end{matrix} \quad (26)$$

O quinto elemento é conectado aos nós 3 e 4 da estrutura, equação (27), assim a rigidez local do elemento é somada nos graus de liberdade dos nós 3 e 4 na matriz de rigidez global da estrutura, equação (28).

$$[\hat{k}_e] = \begin{matrix} & \hat{d}_{3x} & \hat{d}_{4x} \\ \hat{d}_{3x} & \begin{bmatrix} k_5 & -k_5 \\ -k_5 & k_5 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (27)$$

$$[K] = \begin{matrix} & d_{1x} & d_{2x} & d_{3x} & d_{4x} \\ d_{1x} & \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & (k_1 + k_2 + k_3 + k_3) \end{bmatrix} & (-k_2 - k_3) & 0 \\ d_{2x} & & (k_2 + k_3) & -k_4 \\ d_{3x} & 0 & & (k_2 + k_3 + k_5) & -k_5 \\ d_{4x} & 0 & -k_4 & -k_5 & (k_4 + k_5) \end{matrix} \quad (28)$$

Desta forma obtemos a matriz de rigidez global da estrutura, equação (28), onde a mesma é uma matriz simétrica e singular.

2.10.1 Dimensão da matriz de rigidez

A matriz de rigidez global da estrutura é uma matriz quadrada e simétrica, assim apresenta dimensão com base na quantidade de graus de liberdade da estrutura (PREMIENIECKI, 1968).

A quantidade de graus de liberdade da estrutura é definida pela equação (29).

$$N^{\circ} \text{ de GDL da Estrutura} = \text{Quantidade de Nós} * \text{GDL por Nó} \quad (29)$$

Como neste trabalho consideramos um ambiente de análise tridimensional, temos que cada nó da estrutura apresenta 6 GDL, sendo 3 para Translação e 3 para Rotação em torno dos eixos do sistema.

Consideremos uma estrutura constituída de apenas um elemento e 2 nós. De acordo com a equação (29), temos que a matriz de $[K]$ terá dimensões (12x12), assim será uma matriz como apresentada na equação (30).

$$[K] = \begin{matrix} & \begin{matrix} d_{1x} & d_{1y} & d_{1z} & \theta_{1x} & \theta_{1y} & \theta_{1z} & d_{2x} & d_{2y} & d_{2z} & \theta_{2x} & \theta_{2y} & \theta_{2z} \end{matrix} \\ \begin{matrix} k_{1,1} & k_{1,2} & k_{1,3} & k_{1,4} & k_{1,5} & k_{1,6} & k_{1,7} & k_{1,8} & k_{1,9} & k_{1,10} & k_{1,11} & k_{1,12} \\ & k_{2,2} & k_{2,3} & k_{2,4} & k_{2,5} & k_{2,6} & k_{2,7} & k_{2,8} & k_{2,9} & k_{2,10} & k_{2,11} & k_{2,12} \\ & & k_{3,3} & k_{3,4} & k_{3,5} & k_{3,6} & k_{3,7} & k_{3,8} & k_{3,9} & k_{3,10} & k_{3,11} & k_{3,12} \\ & & & k_{4,4} & k_{4,5} & k_{4,6} & k_{4,7} & k_{4,8} & k_{4,9} & k_{4,10} & k_{4,11} & k_{4,12} \\ & & & & k_{5,5} & k_{5,6} & k_{5,7} & k_{5,8} & k_{5,9} & k_{5,10} & k_{5,11} & k_{5,12} \\ & & & & & k_{6,6} & k_{6,7} & k_{6,8} & k_{6,9} & k_{6,10} & k_{6,11} & k_{6,12} \\ & & & & & & k_{7,7} & k_{7,8} & k_{7,9} & k_{7,10} & k_{7,11} & k_{7,12} \\ & & & & & & & k_{8,8} & k_{8,9} & k_{8,10} & k_{8,11} & k_{8,12} \\ & & & & & & & & k_{9,9} & k_{9,10} & k_{9,11} & k_{9,12} \\ & & & & & & & & & k_{10,10} & k_{10,11} & k_{10,12} \\ & & & & & & & & & & k_{11,11} & k_{11,12} \\ & & & & & & & & & & & k_{12,12} \end{matrix} \\ \end{matrix} \quad (30)$$

2.11 Carregamento

O vetor de carregamento de um elemento, contém as componentes de forças e momentos aplicadas nos nós (LOGAN, 2007).

Considerando um elemento com 2 nós no espaço, temos 6 componentes de carregamento por nó, 3 forças concentradas e 3 momentos, portando o vetor de carregamento que desse elemento terá 12 componentes, equação (31).

$$\{\hat{f}\} = \{\hat{f}_{1x} \quad \hat{f}_{1y} \quad \hat{f}_{1z} \quad \hat{m}_{1x} \quad \hat{m}_{1y} \quad \hat{m}_{1z} \quad \hat{f}_{2x} \quad \hat{f}_{2y} \quad \hat{f}_{2z} \quad \hat{m}_{2x} \quad \hat{m}_{2y} \quad \hat{m}_{2z}\}^T \quad (31)$$

Carregamentos distribuídos e pressurizações são cargas aplicadas nos elementos, porém se resumem em componentes de carregamento aplicado nos nós do elemento, sendo assim o formato apresentado pela equação (31) não é alterado.

2.12 Condição de contorno

A matriz de rigidez global, $[K]$, é construída de forma que todos os deslocamentos da estrutura possam ser considerados, incluindo os movimentos de corpo rígido.

As condições de contorno, que são descritas através de deslocamentos conhecidos, removem os graus de liberdade do sistema, fazendo com que a matriz $[K]$ deixe de ser singular, permitindo a obtenção de uma solução para o sistema linear (LOGAN, 2007).

Para análises no espaço tridimensional (x, y, z) , as componentes de translação e rotação são relacionadas para determinação das condições de contorno. Para um elemento unidimensional com dois nós, no espaço, temos um vetor de deslocamento do elemento baseado na quantidade de nós, portanto esse vetor possuirá 12 componentes, sendo apresentado equação (32) (LOGAN, 2007).

$$\{u\} = \{\hat{d}_{1x} \quad \hat{d}_{1y} \quad \hat{d}_{1z} \quad \hat{\theta}_{1x} \quad \hat{\theta}_{1y} \quad \hat{\theta}_{1z} \quad \hat{d}_{2x} \quad \hat{d}_{2y} \quad \hat{d}_{2z} \quad \hat{\theta}_{2x} \quad \hat{\theta}_{2y} \quad \hat{\theta}_{2z}\}^T \quad (32)$$

2.12.1 Deslocamentos ativos e prescritos

Onde se encontram os apoios da estrutura é dito que os deslocamentos nos GDL são nulos, em outras palavras os deslocamentos dos GDL são iguais a 0.

Os deslocamentos prescritos podem ser diferentes de zero. Neste caso, forças adicionais são induzidas nos nós devido a esses deslocamentos iniciais.

Os GDL onde os deslocamentos são conhecidos, são chamados de prescrito, já os que não são conhecidos são chamados de ativos, sendo as variáveis do problema, portanto são os GDL onde se desejam encontrar os deslocamentos (LOGAN, 2007).

Ativos - Deslocamentos não conhecidos

Prescritos - Deslocamento conhecidos

2.12.2 Condensação estática

A matriz de rigidez, deslocamento e forças são particionadas de acordo com os graus de liberdade prescritos e ativos, como mostra a equação (33) (LOGAN, 2007).

O método utilizado para particionar os graus de liberdade prescritos e ativos é conhecido como condensação estática, que é aplicado para reduzir o número de graus de liberdade do elemento e assim compactar a matriz de rigidez, deslocamento e carregamento (BATHE, 1982).

$$\begin{bmatrix} [K_{aa}] & [K_{ap}] \\ [K_{pa}] & [K_{pp}] \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \{u_a\} \\ \{u_p\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{f_a\} \\ \{f_p\} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{R_p\} \end{Bmatrix} \quad (33)$$

Onde:

- Índice “a” = graus de liberdade ativos (deslocamentos desconhecidos)
- Índice “p” = graus de liberdade prescritos (deslocamentos conhecidos)
- $\{f\}$ = forças nodais aplicadas
- $\{R\}$ = reações nos apoios

Da primeira equação obtemos as equações (34) a (36).

$$[K_{aa}] \cdot \{u_a\} + [K_{ap}] \cdot \{u_p\} = \{f_a\} \quad (34)$$

$$[K_{aa}] \cdot \{u_a\} = \{f_a\} - [K_{ap}] \cdot \{u_p\} \quad (35)$$

$$\{u_a\} = [K_{aa}]^{-1} \cdot (\{f_a\} - [K_{ap}] \cdot \{u_p\}) \quad (36)$$

No caso em que $\{u_p\} = \{0\}$, a equação (36) simplifica-se para $\{u_a\} = [K_{aa}]^{-1} \cdot \{f_a\}$. Por outro lado, se os deslocamentos prescritos não são nulos, então é necessário considerar a carga induzida $[K_{ap}] \cdot \{u_p\}$, que deve ser subtraída da carga $\{f_a\}$ para a obtenção da carga total do sistema linear.

Da segunda equação obtemos as equações (37) a (39).

$$[K_{pa}] \cdot \{u_a\} + [K_{pp}] \cdot \{u_p\} = \{f_p\} + \{R_p\} \quad (37)$$

$$\{R_p\} = [K_{pa}] \cdot \{u_a\} + [K_{pp}] \cdot \{u_p\} - \{f_p\} \quad (38)$$

$$\{R_p\} = \begin{bmatrix} [K_{pa}] & [K_{pp}] \end{bmatrix} \cdot \{u\} - \{f_p\} \quad (39)$$

Assim temos que os deslocamentos dos nós ativos é dado pela equação (36) e as reações dos apoios são dados pela equação (39) (BATHE, 1982) (LOGAN, 2007).

3 METODOLOGIA

Para conveniência das análises estruturais, a utilização de recursos computacionais se faz necessário. Assim o código desenvolvido, utilizando como linguagem de programação o software Matlab e baseando-se na análise matricial de estruturas, foi condicionado em rotinas e sub-rotinas de forma que seja de fácil interpretação, alteração e inclusão de novos elementos e recursos que agreguem maior riqueza nos resultados obtidos.

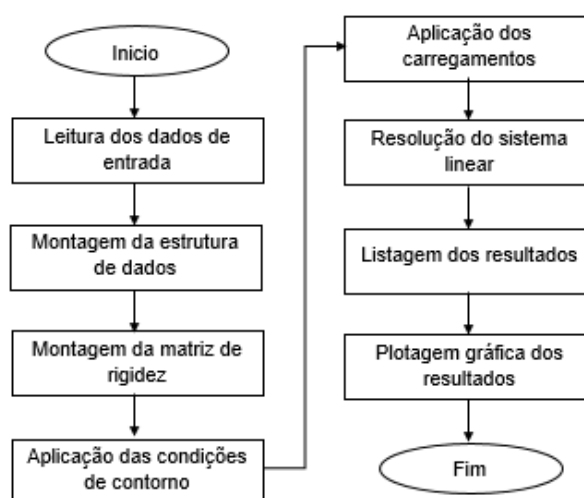
O código desenvolvido possui a capacidade de cálculo estático de estruturas com elementos unidimensionais contento rotação nos apoios, cargas nodais e distribuídas linearmente nos elementos e o recurso de offset para os elementos de viga.

Afim de assegurar que os resultados obtidos estão condizentes com o esperado, foi realizado comparação com cálculos analíticos, obtidos de referências bibliográficas, e com os resultados obtidos em um software comercial.

3.1 Programação computacional

Para que se obtenha resultados corretos, é necessário que a ordem lógica de resolução, metodologia de cálculo, seja conhecida e organizada. Portanto a utilização de fluxogramas estabelece uma ordem a ser seguida, como mostrado na Figura 11.

Figura 11 – Fluxograma básico da programação



Fonte: Próprio autor.

Em Ferreira (2009) são apresentadas rotinas computacionais para resolução de problemas únicos, utilizando-se de apenas uma topologia de elemento por vez.

A rotina desenvolvida traz como ideia a utilização de múltiplos elementos na análise, deixando o programa mais robusto e com melhor facilidade para implementação de novas rotinas e elementos.

3.2 Entrada de dados

Os Dados de entrada são inseridos em forma de células, permitindo que dados de diferentes tamanhos e tipos sejam inseridos ao mesmo tempo em uma variável de entrada.

3.2.1 Sistema de coordenadas (coordSystem)

Para definição de um sistema de coordenadas são inseridos três pontos cujas posições estabelecem uma relação aos eixos do sistema global.

O campo de entrada deve conter a identidade do sistema de coordenadas (ID) e as coordenadas de três pontos, no sistema global, que definem os eixos do sistema local, eixos [x, y, z], Figura 12.

Figura 12 – Entrada de dados – sistemas de coordenadas

```
% Coordinate: ID, [P1], [P2], [P3]
coordSystem = { 1, [0, 0, 0], [1, 1, 0], [1, 2, 0]};
```

Fonte: Próprio autor.

3.2.2 Materiais (material)

Como a definição da rigidez dos elementos leva em consideração as propriedades dos materiais, são inseridas as características do tipo de material utilizado nos elementos, Figura 13.

O campo de entrada de materiais deve conter a identidade do material (ID), o tipo

de material e os valores que serão utilizados para determinação da matriz de rigidez.

O código leva em consideração apenas a utilização de materiais isotrópicos, portanto é necessário o do módulo de elasticidade, módulo de elasticidade a torção, coeficiente de poisson e densidade.

Figura 13 – Entrada de dados – materiais

```
% Material: ID, type, value
%   isotropic : Young, Shear Modules , Poisson, density
material = { 1, 'isotropic', [1,2e6, 0 , 0, 0]};
```

Fonte: Próprio autor.

3.2.3 Propriedades (property)

Assim como os dados dos materiais, as propriedades geométricas também são necessárias para definição da matriz de rigidez dos elementos, portanto devem ser inseridas como mostrada na Figura 14.

Os campos de propriedades são referentes as topologias dos elementos utilizados. Como o programa desenvolvido é para apenas elementos unidimensionais serão considerados truss3D para elemento de barra, spring para elemento de mola e frame3D para elemento de viga.

As propriedades são inseridas contendo a identificação de cada propriedade (ID), sua topologia, a identificação do material que será associada com a propriedade e as características geométricas e rigidez que serão utilizadas para a determinação da matriz de rigidez do elemento.

Figura 14 – Entrada de dados – propriedades

```
% Property: ID, type, matID, value
%   truss3D  : Area
%   spring   : kx, ky, kz, krotx, krotz, kring
%   frame3D  : Area, J, Iy, Iz
property = { 1, 'truss3D', 1, [0.302];
            2, 'spring', 1, [2.e6 0 0 0 0 0];
            3, 'frame3D', 1, [2e-3 0 0 5e-5]};
```

Fonte: Próprio autor.

3.2.4 Nós (node)

Neste campo são adicionados os nós da estrutura, Figura 15.

As coordenadas dos nós são especificadas no sistema de coordenada global.

O campo dos nós deve conter a identidade do nó (ID), a coordenada do sistema global nos eixos [X,Y,Z] e a identidade do sistema de coordenada que será associada com o nó.

No caso de apoio inclinado, o nó possui rotação, deve ser inserido a identidade do sistema de coordenada, csysID do coordSystem, que define a rotação do nó. Caso o nó não possua rotação o csysID é 0.

Figura 15 – Entrada de dados – nós

```
% Node: ID, coord, csysID
node = { 1, [72, 0, 0], 0;
         2, [ 0, 36, 0], 0;
         3, [ 0, 36, 0], 0;
         4, [ 0, 0, -48], 0;};
```

Fonte: Próprio autor.

3.2.5 Elementos (element)

Neste campo são inseridos os elementos da estrutura.

Para declarar o elemento é necessário a entrada da identificação do elemento (ID), da topologia associada, a identificação da propriedade e os nós que definem a posição das extremidades do elemento.

Para os elementos de mola e viga, é necessário definir a orientação do elemento, assim é inserido a coordenada de um terceiro ponto para sua orientação. Em um caso particular, onde o elemento de viga possua offset, é necessário inserido as coordenadas para inserção do offset nos nós do elemento.

Figura 16 – Entrada de dados – elementos

```

% Element: ID, type, propID, nodeID, value(cs vector, offset (v1,v2) both on local
coordinate)
%cs vector defina a orientacao do elemento para as prop.
element = { 1, 'truss3D', 3, [ 1, 2], {[], []};
           2, 'spring', 2, [ 2, 4], {[1, -1, 0], []};
           3, 'frame3D', 1, [ 3, 2], {[0, 1, 0], [100, 200, 0, 100, 200, 0]};};

```

Fonte: Próprio autor.

3.2.6 Cargas na estrutura (nodeLoad e elementLoad)

Os carregamentos da estrutura são divididos em duas categorias, carregamentos nodais e carregamento distribuídos nos elementos.

Para a entrada dos carregamentos nodais, aqueles que estão pontualmente sobre os nós, devem ser inseridos a identificação do carregamento (ID), o grau de liberdade a qual o carregamento está atribuído e o valor do carregamento, como mostrado na Figura 17.

Figura 17 – Entrada de dados – cargas nos nós

```

% Node Load: nodeID, dof, value
nodeLoad = { 1, 3, -1000};

```

Fonte: Próprio autor.

Já os carregamentos distribuídos nos elementos devem conter a identificação do elemento onde está o carregamento, o grau de liberdade, no sistema local do elemento a qual o carregamento está atribuído e o valor inicial e final do carregamento, como mostrado na figura, Figura 18

Figura 18 – Entrada de dados – cargas nos elementos

```

% Element Load: elemID, dir, value - Local coordinate
elementLoad = { 1, 2, [-100, -100];
               2, 2, [-100, -100];
               3, 1, [-100, -100]};};

```

Fonte: Próprio autor.

Tanto para carregamentos nodais quanto para carregamento distribuídos, o sentido vetorial do carregamento é definido com o sinal de positivo ou negativo que será colocado junto o valor do carregamento.

3.2.7 Condição de contorno (boundary)

Para que seja possível a resolução do problema, as condições de contorno são descritas de forma a conter uma identificação do nó (ID), o grau de liberdade no qual se deseja aplicar a condição (GDL, sendo, de 1 a 6) e o valor de deslocamento prescrito, que pode ser nulo ou não, como mostrado na Figura 19

Figura 19 – Entrada de dados – condições de contorno

```
% Boundary Condition: nodeID, dof, value
boundary = { 1, 2, 0;
             2, 1, 0; 2, 2, 0; 2, 3, 0;
             3, 1, 0; 3, 2, 0; 3, 3, 0;
             4, 1, 0; 4, 2, 0; 4, 3, 0;};
```

Fonte: Próprio autor.

3.2.8 Estrutura de dados

Os dados do programa são armazenados em dois grupos: variáveis do programa principal e estrutura de dados.

As variáveis do programa principal são:

- | | |
|----------------|---|
| • Stiffness | Matriz de rigidez global da estrutura |
| • Displacement | Vetor de deslocamentos |
| • Load | Vetor de carregamentos/forças nodais |
| • Force | Vetor de forças nodais de entrada |
| • Reaction | Vetor de reações |
| • Active | Vetor com os graus de liberdade ativo |
| • Constraints | Vetor com as condições de contorno |
| • Prescribed | Vetor com os graus de liberdade prescritos |
| • Singular | Vetor com os graus de liberdade com singularidade |

Já os dados de entrada do problema são armazenados em um modelo de estrutura de dados, criado através de uma sub-rotina que realiza a leitura dos dados de entrada e os organiza, fazendo com que os dados do modelo possam ser acessados mais facilmente.

3.3 Montagem das matrizes

A matriz de rigidez global da estrutura é criada adicionando-se a contribuição da rigidez de todos os elementos. Assim é realizado um looping por cada elemento, para a criação de sua matriz de rigidez.

Como cada tipo de elemento possui uma matriz de rigidez diferente, é utilizado um ponteiro de funções, próprio do software Matlab, para ativar a função específica do elemento.

O procedimento realizado é descrito nos itens abaixo e na Figura 20

- Looping por todos os elementos
- Captura dos graus de liberdade do elemento.
- Criação da matriz de rigidez do elemento.
- Montagem da matriz de rigidez global.

Figura 20 – Montagem da matriz de rigidez global

```
%----- Assembly Global Stiffness -----  
for i = 1 : model.element.count  
    dof = element_dof(model, i);  
    kelem = element_stiffness(model, i, false);  
    Stiffness(dof,dof) = Stiffness(dof,dof) + kelem;  
end
```

Fonte: Próprio autor.

3.4 Obtenção dos resultados

3.4.1 Deslocamentos prescritos

Devido ao tamanho e a complexidade a que as matrizes podem chegar, o software Matlab utiliza de recursos próprios que são capazes de tirar vantagem das propriedades algébricas das matrizes e assim direciona-las para o *solver* apropriado.

A resolução do sistema linear, utilizada na programação para obtenção dos deslocamentos prescritos, é demonstrada na Figura 21

Figura 21 – Resolução de sistema linear

```
%----- Solve Linear System -----
Load = Force(active) - Stiffness(active,prescribed)*Displacement(prescribed);
Displacement(active) = Stiffness(active,active)\ Load;
```

Fonte: Próprio autor.

3.4.2 Reações de apoio

Através da simplificação analítica adotada, conforme mostrada na condensação estática, foi possível programar a obtenção das reações de apoio de forma direta.

A obtenção das reações de apoio é demonstrada na Figura 22

Figura 22 – Reações de apoio

```
%----- Support Reactions -----
Reaction(prescribed) = Stiffness(prescribed,:) * Displacement - Force(prescribed);
```

Fonte: Próprio autor.

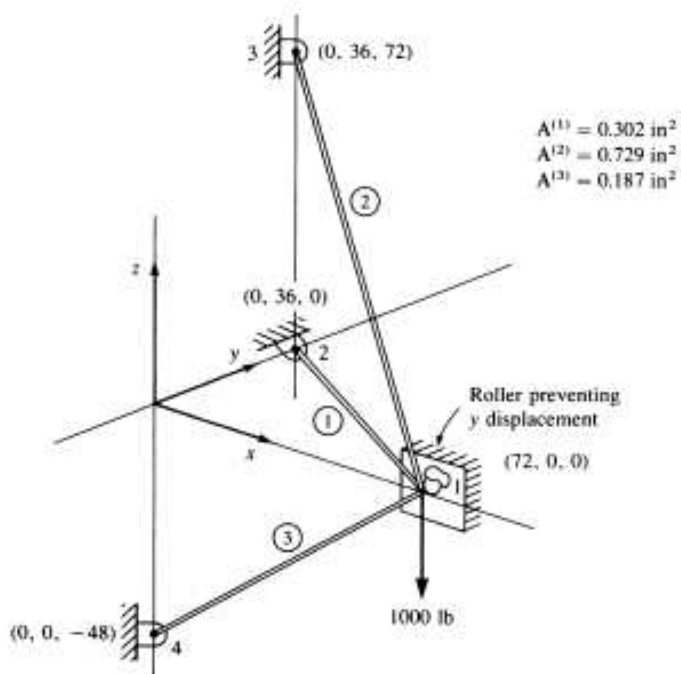
4 PROBLEMA ESTRUTURAL

Afim de validar o código computacional desenvolvido, foram realizadas análises envolvendo problemas presentes na literatura, problemas com soluções analíticas e utilizando-se comparação com um software comercial.

4.1 Análise de uma treliça espacial

A treliça, figura, é composta por quatro nós, cujas coordenadas em polegadas, e três elementos. As informações são descritas no desenho. O módulo de elasticidade $E = 1,2 \times 10^6$ psi para todos os elementos, o carregamento de 1000 lb é aplicado no nó 1 com sentido negativo no eixo Z. Os nós 2,3 e 4 estão restringidos do movimento de translação em todos os eixos, já o nó 1 possui restrição ao movimento de translação no eixo Y.

Figura 23 – Treliça espacial



Fonte: Logan (2007)

4.1.1 Entrada de dados

Com as informações dadas pelo problema estrutural, foi possível criar o arquivo de entrada de dados, para leitura do código computacional.

Figura 24 – Entrada de dados para treliça espacial

```

%----- Entrada de Dados -----
% Coordinate: ID, [P1], [P2], [P3]
coordSystem = {};

% Material: ID, type, value
% isotropic : Young, Shear Modules , Poisson, density
material = {1, 'isotropic', [1.2e6, 0, 0, 0]};

% Property: ID, type, matID, value
%   truss3D : Area
%   spring  : kx, ky, kz, krotx, krotz, krotz
%   frame3D : Area, J, Iy, Iz
property = {1, 'truss3D', 1, [0.302];
           2, 'truss3D', 1, [0.729];
           3, 'truss3D', 1, [0.187]};

% Node: ID, coord, csysID
node = {1, [72, 0, 0], 0;
        2, [0, 36, 0], 0;
        3, [0, 36, 72], 0;
        4, [0, 0, -48], 0};

%Element: ID, type, propID, nodeID, value(cs vector, offset (v1,v2) both on local
coordinate)%cs vector define a orientacao do elemento para as prop.
element = {1, 'truss3D', 3, [1, 4], {[0, 0, 0], [0 0 0 0 0 0]};
          2, 'truss3D', 2, [1, 3], {[0, 0, 0], [0 0 0 0 0 0]};
          3, 'truss3D', 1, [1, 2], {[0, 0, 0], [0 0 0 0 0 0]}};

% Node Load: nodeID, dof, value
nodeLoad = {1, 3, -1000};
% Element Load: elemID, dir, value - Local coordinate
elementLoad = {};

% Boundary Condition: nodeID, dof, value
boundary = {1, 2, 0;
           2, 1, 0;
           2, 2, 0;
           2, 3, 0;
           3, 1, 0;
           3, 2, 0;
           3, 3, 0;
           4, 1, 0;
           4, 2, 0;
           4, 3, 0};

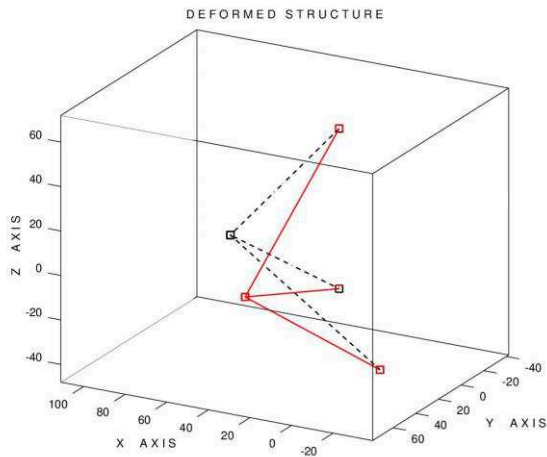
```

Fonte: Próprio autor.

4.1.2 Resultados

Foi obtido a forma deformada, Figura 25, e os resultados de deslocamento, reações de apoio, e forças nos elementos em um arquivo de texto, Figura 26.

Figura 25 – Forma deformada da treliça espacial



Fonte: Próprio autor.

Figura 26 – Resultados da análise

DISPLACEMENT VECTOR						
NODE ID	T1	T2	T3	R1	R2	R3
1	-7.1114e-002	0.0000e+000	-2.6624e-001	0.0000e+000	0.0000e+000	0.0000e+000
2	0.0000e+000	0.0000e+000	0.0000e+000	0.0000e+000	0.0000e+000	0.0000e+000
3	0.0000e+000	0.0000e+000	0.0000e+000	0.0000e+000	0.0000e+000	0.0000e+000
4	0.0000e+000	0.0000e+000	0.0000e+000	0.0000e+000	0.0000e+000	0.0000e+000

FORCES OF SINGLE-POINT CONSTRAINT						
NODE ID	T1	T2	T3	R1	R2	R3
1	-----	-2.2316e+002	-----	-----	-----	-----
2	2.5612e+002	-1.2806e+002	0.0000e+000	-----	-----	-----
3	-7.0245e+002	3.5122e+002	7.0245e+002	-----	-----	-----
4	4.4633e+002	0.0000e+000	2.9755e+002	-----	-----	-----

GRID POINT SINGULARITY TABLE						
NODE ID	T1	T2	T3	R1	R2	R3
1	-----	-----	-----	0.0000e+000	0.0000e+000	0.0000e+000
2	-----	-----	-----	0.0000e+000	0.0000e+000	0.0000e+000
3	-----	-----	-----	0.0000e+000	0.0000e+000	0.0000e+000
4	-----	-----	-----	0.0000e+000	0.0000e+000	0.0000e+000

FORCES IN TRUSS ELEMENTS			
ELEMENT ID	AXIAL FORCE	AXIAL FORCE	
1	5.3642e+002	-5.3642e+002	
2	-1.0537e+003	1.0537e+003	
3	2.8635e+002	-2.8635e+002	

Fonte: Próprio autor.

4.1.3 Comparação dos resultados

Como era esperado, obteve-se o deslocamento no nó 1 nas direções X e Z
A comparação dos deslocamentos é feita na **Tabela 3**

Tabela 3 – Comparação de deslocamento para treliça espacial

Nó	DOF	Valor Literatura	Valor Programa	ERRO %
1	1	-7,2e-02	-7,1114e-02	1,23 %
1	3	-2,64e-01	-2,6624e-01	-0,84 %

Fonte: Próprio autor.

A literatura traz também valores de tensão para os elementos, portanto em uma fase de pós processamento também foi possível calcular essas tensões, mostradas na tabela.

Tabela 4 – Comparação de tensão para treliça espacial

Elemento	Área	Força no Elemento	Tensão Calculada - PSI	Tensão Literatura - PSI	ERRO %
1	0,187	536,420	2.868,56	2.850,00	0,63 %
2	0,729	1053,7	1.445,41	1.440,00	0,38 %
3	0,302	286,35	948,17	945,00	1,00 %

Fonte: Próprio autor.

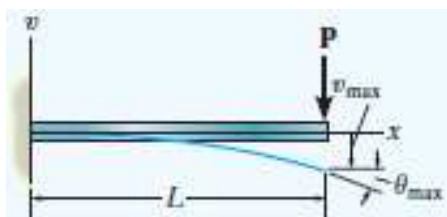
Em comparação com a literatura, os resultados obtidos são satisfatórios.

A diferença entre os resultados calculados e os resultados da literatura é devida provavelmente ao arredondamento adotado.

4.2 Viga no plano

O problema selecionado consiste em uma viga em balanço, Figura 27 , com comprimento (L) de 3000 mm, cujo modelo é criado com elementos de viga, com um carregamento (P) de 10.000,00 N.

Em termos de deflexão máxima e rotação máxima, na extremidade livre da viga, são resultados analíticos conhecidos através das equações da linha elástica.

Figura 27 – Viga em balanço.

Fonte: Hibbeler (2015)

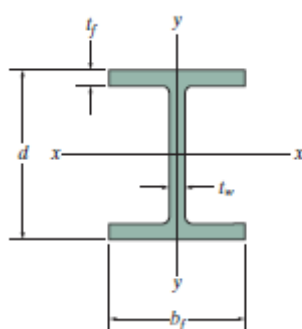
A deflexão máxima é dada através da equação (40), e a rotação máxima é dada pela equação (41), ambas equações são em relação a extremidade livre da viga.

$$\theta_{max} = \frac{-PL^2}{2EI} \quad (40)$$

$$v_{max} = \frac{-PL^3}{3EI} \quad (41)$$

A viga analisada é feita em aço ASTM A242, com modulo de elasticidade igual a 190 GPa e coeficiente de Poisson igual a 0,29.

A seção transversal é um perfil de viga I, Figura 28, cujas propriedades são dadas na Tabela 5.

Figura 28 – Seção transversal da viga.

Fonte: Hibbeler (2015)

Tabela 5 – Dados da seção transversal

Área [mm ²]	d [mm]	t _w [mm]	b _f [mm]	t _f [mm]	I – Eixo X [10 ⁶ mm ⁴]	I – Eixo Y [10 ⁶ mm ⁴]
16500	318	13,10	308	20,60	308	100

Fonte: <https://www.makeitfrom.com/material-properties/ASTM-A572-HSLA-Steel>

4.2.1 Entrada de dados

Foram realizadas 4 análises afim de se encontrar a curva de dispersão para os deslocamentos e rotações na extremidade livre.

Essas análises foram realizadas com 1, 2, 4 e 8 elementos.

Devido a quantidade de análises realizadas, abaixo segue apenas a entrada de dados da análise com 4 elementos, Figura 29.

Figura 29 – Entrada de dados para viga em balanço

```

%----- Entrada de Dados -----

% Coordinate: ID, [P1], [P2], [P3]
coordSystem = {};

% Material: ID, type, value
%   isotropic : Young, Shear Modules , Poisson, density
material = {
    1, 'isotropic', [190e3 73.643e3 0.29 0]};

% Property: ID, type, matID, value
%   truss3D   : Area
%   spring    : kx, ky, kz, krotx, krotz, krotz
%   frame3D   : Area, J, Iy, Iz
property = {
    1, 'frame3D', 1, [16500, 0, 100e6, 308e6]};

% Node: ID, coord, csysID
node = {1, [0,0, 0],0;
        2, [0,0,3000],0;
        3, [0,0, 750],0;
        4, [0,0,1500],0;
        5, [0,0,2250],0};

% Element: ID, type, propID, nodeID, value(cs vector, offset (v1,v2) both on
local coordinate) - %cs vector defina a orientacao do elemento para as prop.
element = {1, 'frame3D', 1, [1,3], {[0, 1, 0], []};
           2, 'frame3D', 1, [3,4], {[0, 1, 0], []};
           3, 'frame3D', 1, [4,5], {[0, 1, 0], []};
           4, 'frame3D', 1, [5,2], {[0, 1, 0], []}};

% Node Load: nodeID, dof, value
nodeLoad = {2, 2, -10000};

% Element Load: elemID, dir, value
% Local coordinate
elementLoad = {};

% Boundary Condition: nodeID, dof, value
boundary = {1, 1, 0; 1, 2, 0; 1, 3, 0; 1, 4, 0; 1, 5, 0; 1, 6, 0};

```

Fonte: Próprio autor

4.2.2 Resultados

Com o cálculo analítico, equação (40) e (41), encontramos um deslocamento de -1,5379 mm e uma rotação de $-7,6897E-4$ radianos.

Os deslocamentos e rotações entradas numericamente através do código computacional são mostradas na tabela.

Tabela 6 – Resultados numéricos

Número de nós	1	2	4	8
Deslocamento [mm]	-1,53790	-1,53790	-1,53790	-1,53790
Rotação [Rad]	7,6897E-04	7,6897E-04	7,6897E-04	7,6897E-04

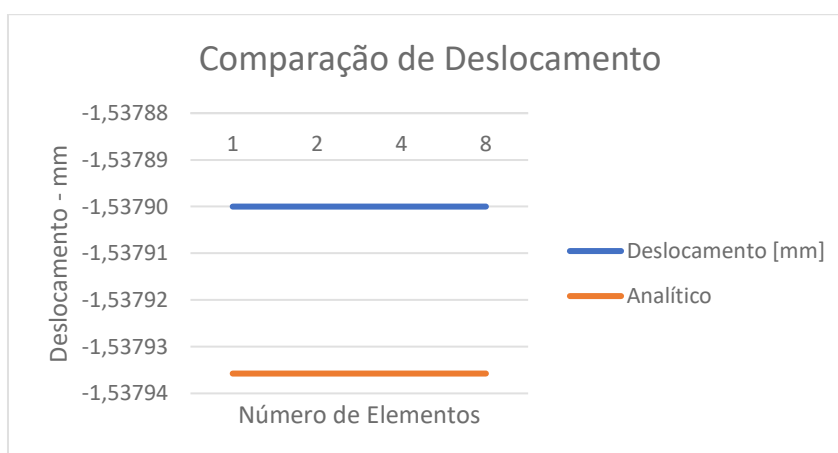
Fonte: Próprio autor

4.2.3 Comparação dos resultados

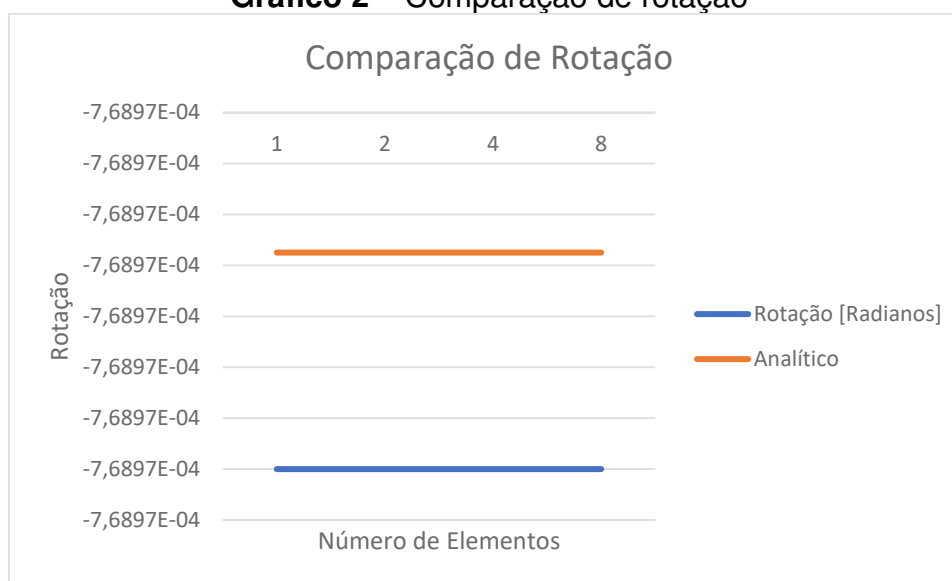
Ao refinar a malha da estrutura, o valor de deslocamento não se altera mostrando que com apenas um elemento, para esta análise, o resultado encontrado se mostra ótimo.

No Gráfico 1 podemos ver a relação entre o deslocamento analítico e numérico, em relação ao número de elementos e no Gráfico 2 a relação entre a rotação analítica e numérica em relação ao número de elementos.

Gráfico 1 – Comparação de deslocamento



Fonte: Próprio autor

Gráfico 2 – Comparação de rotação

Fonte: Próprio autor

Os erros entre os resultados obtidos estão em ordem de 0,002%, sendo devido ao arredondamento das casas decimais.

4.3 Múltiplos elementos

Este problema foi proposto para avaliar o comportamento dos elementos de viga, treliça e mola quando analisados juntos. Trata-se de uma estrutura com aplicação de cargas distribuídas nos elementos de viga e com cargas concentrada em alguns nós.

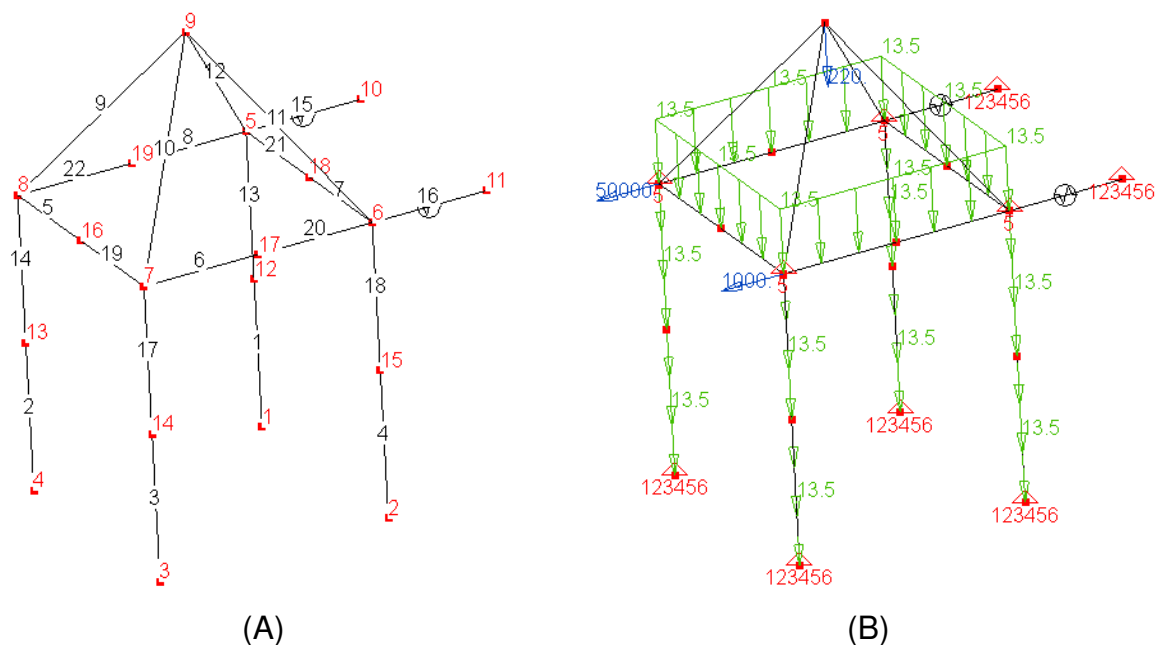
Esta análise permite nos aproximar de problemas reais, onde muitas vezes é necessária a utilização de elementos com topologias diferentes.

Os resultados obtidos foram comparados com a solução de outro programa de elementos finitos (MSC Nastran).

Os elementos de viga possuem seção transversal retangular com medidas de 0,1 X 0,1 m. Os elementos de treliça possuem área da seção transversal igual a 0,005 m e as molas rigidez de 3000000 N/m, toda a estrutura é construída com um material com um modulo de elasticidade de 210 GPa e coeficiente de Poisson de 0,33.

O modelo utilizado na análise foi feito no software Femap e é mostrado na Figura 30.

Figura 30 - Modelo utilizado na análise. (A) Elementos e nós – (B) Carregamento e condição de contorno.



Fonte: Próprio autor

4.3.1 Entrada de dados

A entrada de dados referente ao sistema de coordenadas, materiais e propriedades é descrito na Figura 31.

Figura 31 – Entrada de dados - coordenadas, materiais e propriedades

```
% Coordinate: ID, [P1], [P2], [P3]
coordSystem = {};

% Material: ID, type, value
% isotropic : Young, Shear Modules , Poisson, density
material = {1, 'isotropic', [2.1e11 75e9 0.33 0]};

% Property: ID, type, matID, value
% truss3D : Area
% spring : kx, ky, kz, krotx, krotz
% frame3D : Area, J, Iy, Iz
property = { 1, 'frame3D', 1, [0.01 1.40718e-5 8.3333e-6 8.3333e-6];
            2, 'truss3D', 1, [0.05];
            3, 'spring', 1, [3000000 0 0 0 0 0]};
```

Fonte: Próprio autor

A Figura 32 mostra os nós da estrutura e a Figura 33 os elementos.

Figura 32 – Entrada de dados - nós

```

% Node: ID, coord, csysID
node = { 1, [0, 0, 0], 0;
         2, [4, 0, 0], 0;
         3, [4, 0, 4], 0;
         4, [0, 0, 4], 0;
         5, [0, 5, 0], 0;
         6, [4, 5, 0], 0;
         7, [4, 5, 4], 0;
         8, [0, 5, 4], 0;
         9, [2, 8, 2], 0;
        10, [0, 5, -2], 0;
        11, [4, 5, -2], 0;
        12, [0, 2.5, 0], 0;
        13, [0, 2.5, 4], 0;
        14, [4, 2.5, 4], 0;
        15, [4, 2.5, 0], 0;
        16, [2, 5, 4], 0;
        17, [4, 5, 2], 0;
        18, [2, 5, 0], 0;
        19, [0, 5, 2], 0};

```

Fonte: Próprio autor.

Figura 33 – Entrada de dados - Elementos

```

% Element: ID, type, propID, nodeID, value(cs vector, offset (v1,v2)on local CS)
element = { 1, 'frame3D', 1, [1, 12], {[1, 0, 0], []};
           2, 'frame3D', 1, [4, 13], {[1, 0, 0], []};
           3, 'frame3D', 1, [3, 14], {[ -1, 0, 0], []};
           4, 'frame3D', 1, [2, 15], {[ -1, 0, 0], []};
           5, 'frame3D', 1, [8, 16], {[0, -1, 0], []};
           6, 'frame3D', 1, [7, 17], {[0, -1, 0], []};
           7, 'frame3D', 1, [6, 18], {[0, -1, 0], []};
           8, 'frame3D', 1, [5, 19], {[0, -1, 0], []};
           9, 'truss3D', 2, [8, 9], {[[]];
          10, 'truss3D', 2, [7, 9], {[[]];
          11, 'truss3D', 2, [6, 9], {[[]];
          12, 'truss3D', 2, [5, 9], {[[]];
          13, 'frame3D', 1, [12, 5], {[1, 0, 0], []};
          14, 'frame3D', 1, [13, 8], {[1, 0, 0], []};
          15, 'spring', 3, [5, 10], {[0, -1, 0]};
          16, 'spring', 3, [6, 11], {[0, -1, 0]};
          17, 'frame3D', 1, [14, 7], {[ -1, 0, 0], []};
          18, 'frame3D', 1, [15, 6], {[ -1, 0, 0], []};
          19, 'frame3D', 1, [16, 7], {[0, -1, 0], []};
          20, 'frame3D', 1, [17, 6], {[0, -1, 0], []};
          21, 'frame3D', 1, [18, 5], {[0, -1, 0], []};
          22, 'frame3D', 1, [19, 8], {[0, -1, 0], []}};

```

Fonte: Próprio autor

Os carregamentos da estrutura, cargas nodais e cargas distribuídas nos elementos, são demonstrados na Figura 34.

Figura 34 – Entrada de dados - carregamento

```

% Node Load: nodeID, dof, value
nodeLoad = { 9, 2, -220;
             8, 3, 50000;
             7, 3, 1000};

% Element Load: elemID, dir, value
% Local coordinate
elementLoad = { 5, 2, [13.5, 13.5];
               6, 2, [13.5, 13.5];
               7, 2, [13.5, 13.5];
               8, 2, [13.5, 13.5];
               19, 2, [13.5, 13.5];
               20, 2, [13.5, 13.5];
               21, 2, [13.5, 13.5];
               22, 2, [13.5, 13.5];
               1, 1, [-13.5, -13.5];
               2, 1, [-13.5, -13.5];
               3, 1, [-13.5, -13.5];
               4, 1, [-13.5, -13.5];
               13, 1, [-13.5, -13.5];
               14, 1, [-13.5, -13.5];
               17, 1, [-13.5, -13.5];
               18, 1, [-13.5, -13.5]};

```

Fonte: Próprio autor.

A Figura 35 mostra as condições de contorno da estrutura, ou seja, são inseridos os graus de liberdade e as posições onde existem as restrições de movimento na estrutura.

Figura 35 – Entrada de dados - condição de contorno

```

% Boundary Condition: nodeID, dof, value
boundary = { 1, 1, 0; 1, 2, 0; 1, 3, 0; 1, 4, 0; 1, 5, 0; 1, 6, 0;
            2, 1, 0; 2, 2, 0; 2, 3, 0; 2, 4, 0; 2, 5, 0; 2, 6, 0;
            3, 1, 0; 3, 2, 0; 3, 3, 0; 3, 4, 0; 3, 5, 0; 3, 6, 0;
            4, 1, 0; 4, 2, 0; 4, 3, 0; 4, 4, 0; 4, 5, 0; 4, 6, 0;
            10, 1, 0; 10, 2, 0; 10, 3, 0; 10, 4, 0; 10, 5, 0; 10, 6, 0;
            11, 1, 0; 11, 2, 0; 11, 3, 0; 11, 4, 0; 11, 5, 0; 11, 6, 0;
            5, 5, 0; 6, 5, 0; 7, 5, 0; 8, 5, 0};

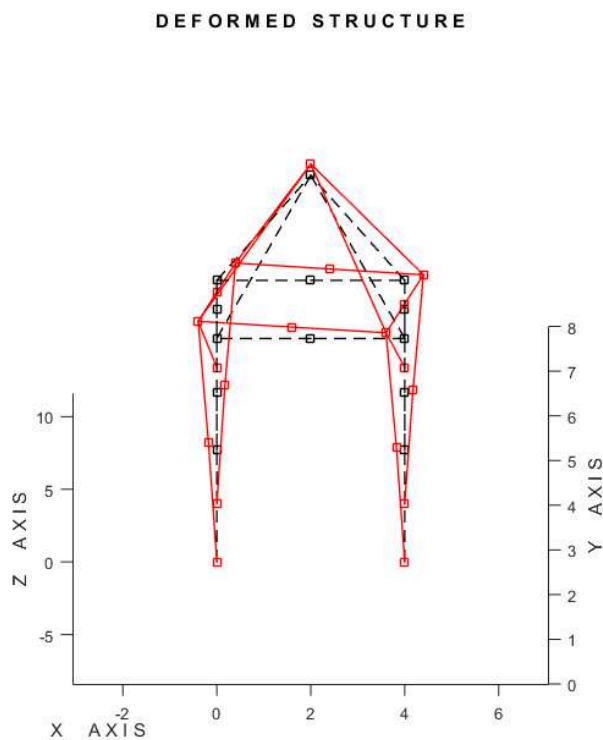
```

Fonte: Próprio autor.

4.3.2 Resultados

Através do código em Matlab, foi obtido a Imagem da forma deformada, Figura 36, e os resultados de deslocamento, reações de apoio, e forças nos elementos em um arquivo de texto, Figura 37.

Figura 36 – Estrutura deformada



Fonte: Próprio autor.

Figura 37 – Resultado da análise

DISPLACEMENT VECTOR						
NODE ID	T1	T2	T3	R1	R2	R3
1	0.0000e+000	0.0000e+000	0.0000e+000	0.0000e+000	0.0000e+000	0.0000e+000
2	0.0000e+000	0.0000e+000	0.0000e+000	0.0000e+000	0.0000e+000	0.0000e+000
3	0.0000e+000	0.0000e+000	0.0000e+000	0.0000e+000	0.0000e+000	0.0000e+000
4	0.0000e+000	0.0000e+000	0.0000e+000	0.0000e+000	0.0000e+000	0.0000e+000
5	-3.9811e-003	-8.9168e-006	1.1834e-002	1.1893e-003	0.0000e+000	3.6257e-004
6	-3.9810e-003	1.3368e-005	3.8629e-003	4.6238e-004	0.0000e+000	3.7839e-004
7	3.9811e-003	-1.4048e-005	3.8750e-003	4.4999e-004	0.0000e+000	-3.6257e-004
8	3.9810e-003	8.2371e-006	1.1916e-002	1.1873e-003	0.0000e+000	-3.7839e-004
9	-1.7348e-005	-1.5992e-005	7.8758e-003	0.0000e+000	0.0000e+000	0.0000e+000
10	0.0000e+000	0.0000e+000	0.0000e+000	0.0000e+000	0.0000e+000	0.0000e+000
11	0.0000e+000	0.0000e+000	0.0000e+000	0.0000e+000	0.0000e+000	0.0000e+000
12	-1.7639e-003	-4.4785e-006	5.1738e-003	3.2529e-003	0.0000e+000	1.1037e-003
13	1.7540e-003	4.0984e-006	5.2158e-003	3.2779e-003	0.0000e+000	-1.0997e-003
14	1.7639e-003	-7.0440e-006	1.6563e-003	1.0500e-003	0.0000e+000	-1.1037e-003
15	-1.7540e-003	6.6640e-006	1.6425e-003	1.0433e-003	0.0000e+000	1.0997e-003
16	3.9811e-003	-1.5955e-005	7.8953e-003	8.1866e-004	3.0153e-003	1.7688e-004
17	3.1753e-008	-1.1677e-005	3.8690e-003	-2.1781e-004	2.9858e-003	7.9063e-006
18	-3.9811e-003	-1.0823e-005	7.8486e-003	8.2585e-004	2.9892e-003	-1.7688e-004
19	-3.1753e-008	-6.4780e-006	1.1875e-002	-6.0060e-004	2.9858e-003	-7.9063e-006

FORCES OF SINGLE POINT CONSTRAINT						
NODE ID	T1	T2	T3	R1	R2	R3
1	5.1654e+002	3.7788e+003	-1.4886e+003	-4.1378e+003	0.0000e+000	-1.4183e+003
2	5.0989e+002	-5.5809e+003	-4.5477e+002	-1.2988e+003	0.0000e+000	-1.4072e+003
3	-5.1654e+002	5.9339e+003	-4.6200e+002	-1.3125e+003	0.0000e+000	1.4183e+003
4	-5.0989e+002	-3.4258e+003	-1.5031e+003	-4.1734e+003	0.0000e+000	1.4072e+003
5	-----	-----	-----	-----	-1.0456e+004	-----
6	-----	-----	-----	-----	-1.0456e+004	-----
7	-----	-----	-----	-----	-1.0502e+004	-----
8	-----	-----	-----	-----	-1.0502e+004	-----
10	0.0000e+000	0.0000e+000	-3.5503e+004	0.0000e+000	0.0000e+000	0.0000e+000
11	0.0000e+000	0.0000e+000	-1.1589e+004	0.0000e+000	0.0000e+000	0.0000e+000

GRID POINT SINGULARITY TABLE						
NODE ID	T1	T2	T3	R1	R2	R3
9	-----	-----	-----	0.0000e+000	0.0000e+000	0.0000e+000

FORCES IN FRAME ELEMENTS							
ELEMENT ID	GRID	AXIAL FORCE	- WEB PLANE 1	SHEARS - PLANE2	TOTAL TORQUE	- BENDING MOMENTS - PLANE 1	PLANE2
1	1	3.7788e+003	5.1654e+002	1.4886e+003	0.0000e+000	-4.1378e+003	1.4183e+003
1	12	-3.7451e+003	-5.1654e+002	-1.4886e+003	0.0000e+000	4.1626e+002	-1.2690e+002
2	4	-3.4258e+003	-5.0989e+002	1.5031e+003	0.0000e+000	-4.1734e+003	-1.4072e+003
2	13	3.4596e+003	5.0989e+002	-1.5031e+003	0.0000e+000	4.1557e+002	1.3243e+002
3	3	5.9339e+003	5.1654e+002	-4.6200e+002	0.0000e+000	1.3125e+003	1.4183e+003
3	14	-5.9001e+003	-5.1654e+002	4.6200e+002	0.0000e+000	-1.5749e+002	-1.2690e+002
4	2	-5.5809e+003	-5.0989e+002	-4.5477e+002	0.0000e+000	1.2988e+003	-1.4072e+003
4	15	5.6146e+003	5.0989e+002	4.5477e+002	0.0000e+000	-1.6183e+002	1.3243e+002
5	8	-3.3341e+001	4.5194e+002	-2.6383e+003	1.9455e+002	5.2767e+003	9.4680e+002
5	16	3.3341e+001	-4.7894e+002	2.6383e+003	-1.9455e+002	1.6371e-011	-1.5918e+001
6	7	-6.3388e+003	-6.1674e+002	-2.6126e+003	1.9550e+002	5.2251e+003	-1.1921e+003
6	17	6.3388e+003	5.8974e+002	2.6126e+003	-1.9550e+002	-1.8190e-012	-1.4420e+001
7	6	-3.3341e+001	4.5194e+002	-2.6156e+003	1.9180e+002	5.2312e+003	9.4680e+002
7	18	3.3341e+001	-4.7894e+002	2.6156e+003	-1.9180e+002	1.8190e-011	-1.5918e+001
8	5	-4.2769e+004	1.5383e+003	-2.6126e+003	1.9550e+002	5.2251e+003	3.1135e+003
8	19	4.2769e+004	-1.5653e+003	2.6126e+003	-1.9550e+002	1.8190e-012	-9.8708e+000
13	12	3.7451e+003	5.1654e+002	1.4886e+003	0.0000e+000	-4.1626e+002	1.2690e+002
13	5	-3.7113e+003	-5.1654e+002	-1.4886e+003	0.0000e+000	3.3053e+003	1.1645e+003
14	13	-3.4596e+003	-5.0989e+002	1.5031e+003	0.0000e+000	-4.1557e+002	-1.3243e+002
14	8	3.4933e+003	5.0989e+002	-1.5031e+003	0.0000e+000	3.3423e+003	-1.1423e+003
17	14	5.9001e+003	5.1654e+002	-4.6200e+002	0.0000e+000	1.5749e+002	1.2690e+002
17	7	-5.8664e+003	-5.1654e+002	4.6200e+002	0.0000e+000	9.9751e+002	1.1645e+003
18	15	-5.6146e+003	-5.0989e+002	-4.5477e+002	0.0000e+000	1.6183e+002	-1.3243e+002
18	6	5.6484e+003	5.0989e+002	4.5477e+002	0.0000e+000	9.7509e+002	-1.1423e+003
19	16	-3.3341e+001	4.7894e+002	-2.6383e+003	1.9455e+002	1.4552e-011	1.5918e+001
19	7	3.3341e+001	-5.0594e+002	2.6383e+003	-1.9455e+002	5.2767e+003	9.6896e+002
20	17	-6.3388e+003	-5.8974e+002	-2.6126e+003	1.9550e+002	0.0000e+000	1.4420e+001
20	6	6.3388e+003	5.6274e+002	2.6126e+003	-1.9550e+002	5.2251e+003	-1.1669e+003
21	18	-3.3341e+001	4.7894e+002	-2.6156e+003	1.9180e+002	-1.4552e-011	1.5918e+001
21	5	3.3341e+001	-5.0594e+002	2.6156e+003	-1.9180e+002	5.2312e+003	9.6896e+002
22	19	-4.2769e+004	1.5653e+003	-2.6126e+003	1.9550e+002	1.8190e-012	9.8708e+000
22	8	4.2769e+004	-1.5923e+003	2.6126e+003	-1.9550e+002	5.2251e+003	3.1478e+003

FORCES IN SPRING ELEMENTS							
ELEMENT ID	GRID	FORCE-X	FORCE-Y	FORCE-Z	MOMENT-X	MOMENT-Y	MOMENT-Y
15	5	-3.5503e+004	0.0000e+000	0.0000e+000	0.0000e+000	0.0000e+000	0.0000e+000
15	10	3.5503e+004	0.0000e+000	0.0000e+000	0.0000e+000	0.0000e+000	0.0000e+000
16	6	-1.1589e+004	0.0000e+000	0.0000e+000	0.0000e+000	0.0000e+000	0.0000e+000
16	11	1.1589e+004	0.0000e+000	0.0000e+000	0.0000e+000	0.0000e+000	0.0000e+000

FORCES IN TRUSS ELEMENTS			
ELEMENT ID	AXIAL FORCE	AXIAL FORCE	AXIAL FORCE
9	-6.3684e+003	6.3684e+003	
10	6.5196e+003	-6.5196e+003	
11	-6.3684e+003	6.3684e+003	
12	6.5196e+003	-6.5196e+003	

Fonte: Próprio autor.

4.3.3 Comparação dos resultados

Para efeito de comparação, vamos comparar os deslocamentos dos nós 7, Tabela 7, e 9, Tabela 8.

Tabela 7 – Comparação deslocamento nó 7

DOF	1	2	3	4	5	6
Nastran	3.9506e-03	-1.3924e-05	3.8600e-03	4.4881e-04	0.0	-3.5978e-04
Octave	3.9811e-03	-1.4048e-05	3.8750e-03	4.4999e-04	0.0	-3.6257e-04
Erro %	0.77 %	0.88 %	0.39 %	0.26 %	0%	0.77 %

Fonte: Próprio autor.

Tabela 8 – Comparação deslocamento nó 9

DOF	1	2	3	4	5	6
Nastran	-1.7370E-05	-1.6360E-05	7.8767E-03	0	0	0
Octave	-1.7348E-05	-1.5992E-05	7.8758E-03	0	0	0
Erro %	0.13 %	2.3 %	0.01 %	0 %	0%	0 %

Fonte: Próprio autor.

Na análise realizada no software MSC Nastran, obtemos singularidade no nó 9 e nos GDL 4, 5 e 6, Figura 38.

No código em Matlab, como esperado obteve-se singularidade no mesmo nó e GDL, que a análise do Nastran, Figura 39.

Figura 38 - AUTOSPC MSC Nastran

```

0
0
      GRID POINT SINGULARITY TABLE
POINT  TYPE  FAILED  STIFFNESS  OLD USET  NEW USET
ID     TYPE  DIRECTION  RATIO     EXCLUSIVE UNION  EXCLUSIVE UNION
  9     G     4         0.00E+00  B         F         SB        S      *
  9     G     5         0.00E+00  B         F         SB        S      *
  9     G     6         0.00E+00  B         F         SB        S      *
1  STATIC
                                JANUARY 31, 2017  MSC.NASTRAN  7/ 6/12  PAGE

```

Fonte: Próprio autor.

Figura 39 - AUTOSPC Programa Matlab

```

-----
      GRID POINT SINGULARITY TABLE
NODE  ID  T1  T2  T3  R1  R2  R3
  9  -----  -----  -----  0.0000e+000  0.0000e+000  0.0000e+000

```

Fonte: Próprio autor.

A Tabela de AUTOSPC do Nastran apresenta o nó, GDL e o valor da rigidez no GDL onde foi localizada a singularidade. Já o AUTOSPC do programa em Matlab apresenta o nó e o valor das reações nos respectivos GDL onde foram localizadas as

singularidades. Assim podemos notar que na Figura 39 os campos presentes com o valor 0 são as forças de reações nos GDL onde foi localizada a singularidade.

5 CONCLUSÃO

Para que as rotinas computacionais desenvolvidas possam ser utilizadas em problemas reais, deve ser realizado uma bateria de análises com problemas onde o resultado já é conhecido, sendo que apenas após a validação do código o mesmo deve ser utilizado.

Os problemas estruturais estáticos analisados apresentaram resultado satisfatório comparados com a literatura e com software comercial, e assim a rotina computacional desenvolvida pode ser empregada para gerar resultados de modelos de estruturas reais.

É importante salientar que a geração da malha da estrutura e julgamento dos resultados é de total responsabilidade do analista, ou engenheiro de cálculo, uma vez que por se tratar de cálculo matricial sempre existirá um resultado e que muitas vezes pode ser incorreto devido a uma errada atribuição de propriedades, materiais, elementos e até mesmo de condição de contorno.

O tempo de processamento do Matlab é proporcional ao tamanho da estrutura utilizada. Devido a limitações de software e hardware, se as matrizes forem grandes pode ocorrer erro no processamento, assim não gerando resultados.

Através do presente trabalho, concluímos que a utilização de rotinas computacionais pode dispensar a utilização de softwares comerciais, evitando a compra de licenças e por sua vez gerar economia nos custos de engenharia. Porém antes de iniciar o desenvolvimento destas rotinas, deve-se ter conhecimento da real necessidade, frequência de utilização e se o tempo gasto para este desenvolvimento é realmente viável, incluindo o fato de que os softwares comerciais apresentam recursos que fazem com que o tempo de análise e processamento seja menor do que das rotinas computacionais desenvolvidas com conhecimentos encontrados nas literaturas.

6 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

A. J. M. FERREIRA. **MATLAB Codes for Finite Element Analysis**. Universidade do Porto, Portugal: Springer, 2009. 235 p.

ASTM A242 HSLA Steel. Disponível em: <<https://www.makeitfrom.com/material-properties/ASTM-A572-HSLA-Steel>>. Acesso em 10 de junho de 2016.

BATHE, Klaus J. **Finite Element Procedures**. New Jersey: Prentice Hall, 1982. 1037 p.

LOGAN, D. L. **A First Course in the Finite Element Method**. 4. ed. Platteville: Thomson, 2007. 836 p.

MCGUIRE, William; GALLANGHER, Richard H.; ZIEMIAN, Ronald D.. **Matrix Structural Analysis**. 2. ed. : John Wiley & Sons, 1999. 480 p.

MSC SOFTWARE (United States Of America) (Ed.). **MSC NASTRAN 2012.2 DOCUMENTATION**. : Msc Software, 2012.

PRZEMIENICKI, J.s.. **Theory of Structural Analysis**. United States Of America: McGraw-hill, 1968. 481 p.

R. C. HIBBELER. **Mechanics of Material**. 3 ed. United States Of America. Pearson, 2015. 901 p.