UNITAU digital

# CÁLCULO 1

ARMANDO ANTONIO MONTEIRO DE CASTRO

Armando Antonio Monteiro de Castro

# Cálculo 1

edUNITAU
EDITORA DA UNIVERSIDADE DE TAUBATÉ

Taubaté 2022

| | |
|---|---|
| Reitora | Profa. Dra. Nara Lucia Perondi Fortes |
| Vice-reitor | Prof. Dr. Jean Soldi Esteves |
| Pró-reitor de Administração | Prof. Dr. Jean Soldi Esteves |
| Pró-reitor de Economia e Finanças | Prof. Dr. Francisco José Grandinetti |
| Pró-reitora Estudantil | Profa. Dra. Máyra Cecilia Dellu |
| Pró-reitor de Extensão e Relações Comunitárias | Profa. Dra. Letícia Maria P. da Costa |
| Pró-reitora de Graduação | Profa. Ma. AngelaPopoviciBerbare |
| Pró-reitor de Pesquisa e Pós-graduação | Prof. Dra. Sheila CavalcaCortelli |
| Comissão de Gestão Compartilhada EaD Unitau | Esp. Helen Francis Silva |
| | Me. José Maria da Silva Junior |
| | Dra. Márcia Regina de Oliveira |

| | |
|---|---|
| Revisão ortográfica-textual | Prof. Me. João de Oliveira |
| | Profa. Ma. Isabel Rosângela dos Santos Amaral |
| Designer Instrucional | Andressa Ferreira Moreira |
| Direção de arte | Unitau Digital |
| Projeto Gráfico/ Diagramação | Danilo César Monteiro |
| Autor | Armando Antonio Monteiro De Castro |
| Unitau-Reitoria | Rua Quatro de Março,432, Centro |
| | Taubaté – São Paulo. CEP:12.020-270 |
| | Central de Atendimento:0800557255 |
| Polo Taubaté – Sede | Rua Conselheiro Moreira de Barros, 203 - Centro |
| | Taubaté – São Paulo. CEP:12.010-080 |
| | Telefones: Coordenação Geral: (12) 3621-1530 |
| | Secretaria: (12) 3622-6050 |

**Sistema Integrado de Bibliotecas - SIBi/ UNITAU**
**Grupo Especial de Tratamento da Informação – GETI**

C355a Castro, Armando Antônio Monteiro de
Cálculo 1 [recurso eletrônico] / Armando Antônio de Castro. – Dados eletrônicos. -- Taubaté : EdUnitau, 2022.

Formato: PDF
Requisitos do sistema: Adobe
Modo de acesso: world wide web

ISBN: 978-65-86914-48-1 (on-line)

1. Cálculo. 2. Integração. 3. Funções. I. Título.

CDD – 515

Ficha catalográfica elaborada pela Bibliotecária Ana Beatriz Ramos – CRB-8/6318

*Índice para Catálogo sistemático*

Cálculo – 515
Integração – 515
Funções – 515

# Sumário

# Recursos de Imersão:

Explorando ideias

Eu indico

Pensando juntos

Pípulas de conhecimento

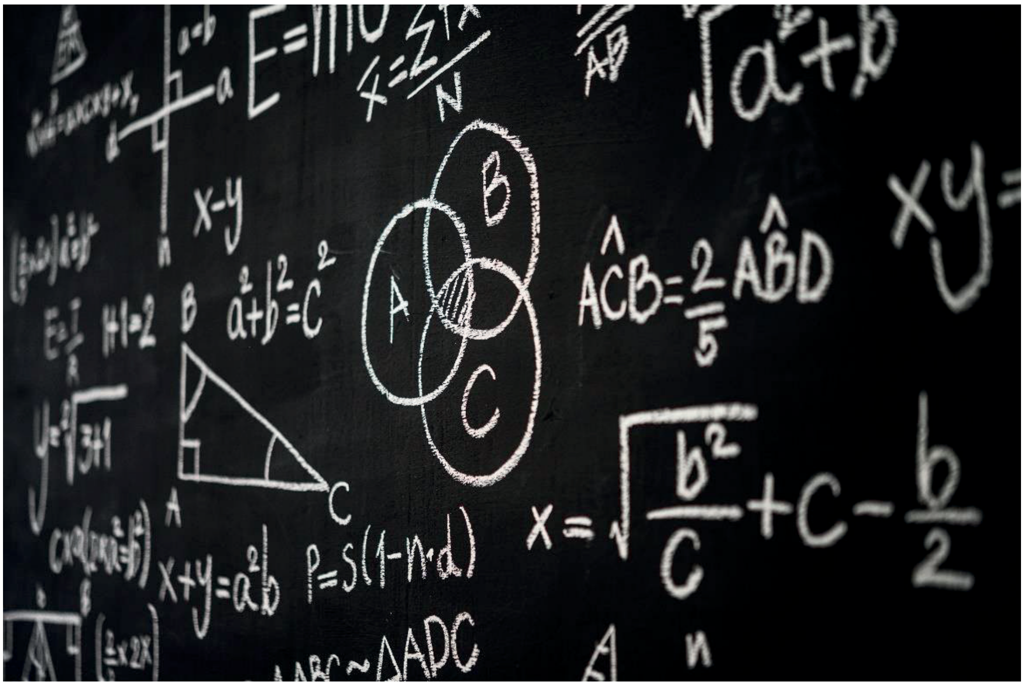
Podcast

QRCode

# Cálculo 1

# Unidade I
# Limite e Continuidade de Função

Nesta Unidade, estudaremos limites e desenvolveremos o conceito de valor limite de uma função, aprendendo a diferenciar valor de função e valor limite de função para um dado valor de x. Para isso, faremos uso de processos algébricos e gráficos, resgatando os conceitos estudados em Pré-Cálculo, como fatoração, simplificação de frações algébricas e funções, dentre outros. Analisando os limites laterais, verificaremos o que é uma indeterminação, estudando os casos possíveis de sua ocorrência e como levantá-la. Veremos também alguns processos algébricos para o cálculo de limites, bem como o que chamamos de Limites Fundamentais. Fechando o estudo de limites, conceito relevante para o entendimento do que seja derivada de uma função, estudaremos funções com relação a sua continuidade ou descontinuidade, conceito relevante, dentre outros, para o esboço do gráfico de funções, objeto primordial de estudo do Cálculo Diferencial e Integral I.



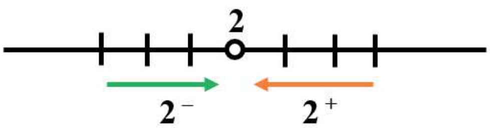
Fonte: Freepik

## 1.1 Noção intuitiva de limite

Vamos verificar a noção intuitiva de limites. Para isso, analisaremos o que ocorre com o valor da função $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$, quando os valores de $x$ se aproximam de 2. Note que podemos nos aproximar de 2 *pela esquerda*, que indicamos: $x \to 2^-$, portanto valores *menores que 2*; ou *pela direita*, que indicamos por $x \to 2^+$, portanto *valores maiores que* 2.

Graficamente, indicamos:

Valores de $x$ *tendendo a* 2



Note que não nos interessa o valor da função quando $x = 2$, mesmo porque a função dada não se define para $x = 2$, pois $2 \notin Dom_{f(x)}$.

Vamos construir duas tabelas que nos mostrarão o que ocorrerá com os valores da função $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$ quando os valores de $x$ *se aproximam do valor* 2, tanto pela esquerda quanto pela direita. Na tabela 1, os valores de "$x$" se aproximam de 2 pela esquerda, ou seja: $x \to 2^-$, que lemos "*x tende a dois pela esquerda*".

Já na tabela 2, os valores de "$x$" se aproximam de 2 pela direita, ou seja: $x \to 2^+$, que lemos "*x tende a dois pela direita*".

Tabela 1: $x \to 2^-$

| $x$ | $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$ |
|---|---|
| – 3 | – 1 |
| – 2 | 0 |
| – 1 | 1 |
| 0 | 2 |
| 1 | 3 |
| 1,5 | 3,5 |
| 1,7 | 3,7 |
| 1,8 | 3,8 |
| 1,9 | 3,9 |
| 1,99 | 3,99 |
| 1,99999 | 3,99999 |
| ↓ $2^-$ | ↓ 4 |

Tabela 2: $x \to 2^+$

| $x$ | $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$ |
|---|---|
| 7 | 9 |
| 6 | 8 |
| 5 | 7 |
| 4 | 6 |
| 3 | 5 |
| 2,5 | 4,5 |
| 2,3 | 4,3 |
| 2,2 | 4,2 |
| 2,1 | 4,1 |
| 2,01 | 4,01 |
| 2,00001 | 4,00001 |
| ↓ $2^+$ | ↓ 4 |

Note que os valores tomados para $x$, em ambas as tabelas, equidistam de "2" tanto pela esquerda quanto pela direita.

Analisando a tabela 1, percebemos que quanto mais próximo de **2**, pela esquerda, o valor de $x$ estiver, mais próximo de **4** o valor da função estará. Matematicamente, escrevemos:

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{x^2-4}{x-2} = 4$$ , e lemos:

*"O valor limite da função tenderá a quatro quando o valor de x tender a dois pela esquerda."*

Analisando a tabela 2, percebemos que quanto mais próximo de **2**, pela direita, o valor de $x$ estiver, mais próximo de **4** o valor da função estará. Matematicamente, escrevemos:

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{x^2-4}{x-2} = 4$$ , e lemos:

*"O valor limite da função tenderá a quatro quando o valor de x tender a dois pela direita."*

Aos valores obtidos pelas tabelas 1 e 2 chamamos de *limites laterais* e, uma vez verificada a existência dos limites laterais e sua *igualdade*, podemos dizer que o *valor limite da função* $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$, *quando o valor de* $x$ *tende a* 2, *tenderá* ao valor 4. Matematicamente, escrevemos:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = 4$$

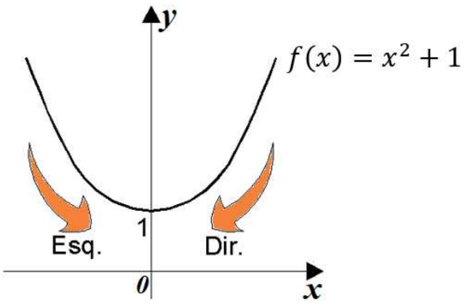
Dessa forma, intuitivamente, podemos estabelecer a *definição de limite* , ou seja:

$$\text{Se: } \begin{cases} \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = M \\ \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = M \end{cases} \Leftrightarrow \lim_{x\to a} f(x) = M$$

O **limite** de uma função só existirá se **existirem** os **limites laterais** e estes **forem iguais**. O **valor** do **limite de uma função** não se relaciona com o **valor da função no ponto** em questão.

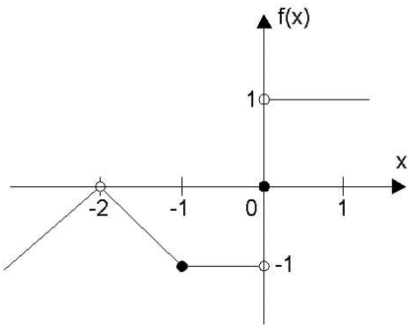
### 1.1.1 Limites Laterais: Algébricos e Gráficos

É também possível determinar o limite de uma função através da análise de seu gráfico. Por exemplo, vamos determinar o limite da função $f(x)=x^2+1$ quando o valor de "$x$" tender a "0". Construído o gráfico e feita a análise, constatamos que, quanto mais próximos de "0" o valor de "$x$" estiver, pela esquerda ou pela direita, mais próximo de 1 o valor da função estará.




$$Se \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} x^2+1=1 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} x^2+1=1 \end{cases} \Leftrightarrow \lim_{x\to 0} x^2+1=1$$

Aplicação do conceito de limites laterais e de valor limite de uma função por meio de gráficos: dado o gráfico abaixo, determinar:




a) $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$ b) $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ c) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

d) $f(-2)$ e) $f(0)$ f) $f(-1)$

**Solução:**

a) $\begin{cases} \lim\limits_{x\to -2^-} f(x)=0 \\ \lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=0 \end{cases} \Rightarrow$ $\lim\limits_{x\to -2} f(x)=0$, pois existem os limites laterais e eles são iguais.

b) $\begin{cases} \lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=-1 \\ \lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=-1 \end{cases} \Rightarrow$ $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=-1$, pois existem os limites laterais e eles são iguais.

c) $\begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -1 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 1 \end{cases}$ $\therefore$ $\nexists \lim\limits_{x \to 0} f(x)$, pois, embora os limites laterais existam, eles são diferentes.

d) $f(-2) = \nexists$, pois $-2 \notin Dom_{f(x)}$ e) $f(0) = 1$ f) $f(-1) = -1$

**Solução:**

Em termos práticos, o cálculo de limites será feito usando procedimentos algébricos, ou seja, trocaremos a função a ser analisada por outra, caso ocorra alguma indeterminação, usando procedimentos algébricos. Para isso, usaremos, dentre outros artifícios, os casos de fatoração, produtos notáveis, racionalização e simplificação de frações algébricas estudadas nas primeiras Unidades da disciplina Pré-Cálculo. Esse procedimento algébrico será necessário, pois quase sempre as funções analisadas geram indeterminações que devem ser removidas, permitindo a análise do valor limite da função para um dado valor de $x$.

### 1.1.2 Definição Formal de Limite

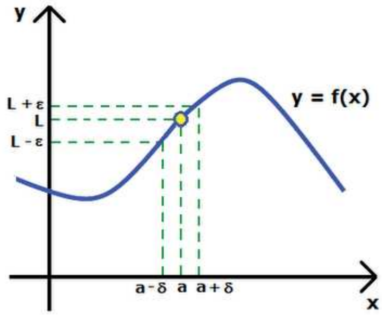
Definição axiomática ou rigorosa: seja uma função $f$ definida em um intervalo aberto $I$ que contém o ponto $a$, exceto possivelmente no próprio ponto $a$, *o* limite de *f(x)* quando $x$ se aproxima de $a$ é $L$.

A afirmação $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ significa que para todo $\varepsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ correspondente, tal que para todo $x$: $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$.

$\varepsilon$ (épsilon) e $\delta$ (delta minúsculo) são grandezas muito pequenas.

Se $\lim\limits_{x\to p} f(x) = L$ f(x) existe, então tal limite é único (unicidade do limite).

Gráfico do $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$, pois, $0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-L| < \varepsilon$




### 1.1.3 Casos de Indeterminação: $\frac{0}{0}$ e $\frac{\infty}{\infty}$

Para o estudo a seguir, definimos como *propriedades dos limites* às relações, onde $a, k \in \mathbb{R}$ :

**P1**. Regra da Constante

$$\lim_{x\to a} k = k$$

**P2.** Regra da Soma ou Diferença

$$\lim_{x\to a}\left[f(x) \pm g(x)\right] = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x)$$

**P3.** Regra do Produto

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)\cdot g(x)\right] = \lim_{x\to a} f(x)\cdot \lim_{x\to a} g(x)$$

**P4.** Regra do Quociente

$$\lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)} \quad \lim_{x\to a} g(x) \neq 0$$

**P5.** Regra da Potenciação

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)\right]^n = [\lim_{x\to a} f(x)]^n$$

**P6.** Regra da Multiplicação por Constante

$$\lim_{x\to a} k\cdot f(x) = k\cdot \lim_{x\to a} f(x)$$

**P7.** Regra da Radiciação

$$\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)} \;,\quad \lim_{x\to a} f(x) \geq 0 \text{ se n par.}$$

Vamos a um exemplo:

Para o cálculo do $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x-2}$, substituímos a variável $x$ por 2, ou seja, entramos com o valor de tendência, obtendo:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\frac{(2)^2-4}{2-2}=\frac{4-4}{2-2}=\frac{0}{0}=?$$

Ao resultado $\frac{0}{0}$, chamaremos de *indeterminação*, indicada por um ponto de interrogação, pois, supondo que $\frac{0}{0}=k$, temos que $0=0\cdot k$. Note que qualquer número real posto no lugar de $k$ tornará a sentença verdadeira, ou seja, serão infinitas as respostas, daí o nome *indeterminação*; esta será removida por processo algébrico e, no caso, usaremos fatoração. Veja como levantamos a indeterminação, fatorando o numerador da fração:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x+2)\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}}=\lim_{x\to 2}(x+2)=(2+2)\quad \therefore\quad \boxed{\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=4}$$

Assim, o valor do limite da função dada, quando $x$ *tende* ao valor 2, *tenderá* a 4.

**Solução:**

Em síntese, para determinarmos o valor limite da função, trocamos a função dada por outra, usando processos algébricos, de modo que a nova função não seja indeterminada no ponto em questão, permitindo-nos sua análise.

Embora somente estudaremos as indeterminações citadas, definimos como indeterminações as expressões:

$$\frac{0}{0};\quad \frac{\infty}{\infty};\quad \infty-\infty;\quad 1^{\infty};\quad 0^{0};\quad \infty^{0};\quad 0\cdot\infty$$

É interessante saber que cada caso de indeterminação terá procedimento algébrico específico para o cálculo do limite.

➢ **Nos casos $\frac{0}{0}$, faremos:**

1) Se houver polinômio, substituir, quando possível, o numerador e o denominador da fração pela sua forma fatorada e, a seguir, simplificar, obtendo a nova função.
2) Aparecendo raiz, ou seja, radical, devemos racionalizar a função multiplicando-a pelo seu conjugado.
3) Se ocorrer $\frac{0}{0}$ com $x \to \infty$ e houver polinômio envolvido, devemos dividir cada termo pela menor potência de $x$.

➢ **Nos casos $\frac{\infty}{\infty}$, faremos:**

1) Nos casos envolvendo polinômios, é comum dividir cada termo pela maior potência de $x$.
2) Nos demais casos, deve-se considerar "*de valor*" somente o termo de maior expoente de cada membro da fração.

Veja alguns exemplos: calcular $\lim\limits_{x \to 2} \frac{2x^2 - 8}{5x - 10}$.

**Solução:**

Entrando com o valor de tendência: $\lim\limits_{x \to 2} \frac{2x^2 - 8}{5x - 10} = \frac{2(2)^2 - 8}{5(2) - 10} = \frac{8 - 8}{10 - 10} = \frac{0}{0} = ?$

Note que temos uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$, gerada pela divisão de polinômios.

Fatorando a função dada e, na sequência, aplicando simplificação algébrica, obtemos nova função, que esperamos não seja indeterminada no ponto em questão, veja só:

$$\lim_{x \to 2} \frac{2x^2 - 8}{5x - 10} = \lim_{x \to 2} \frac{2(x^2 - 4)}{5(x - 2)} = \lim_{x \to 2} \frac{2(x^2 - 4)}{5(x - 2)} = \lim_{x \to 2} \frac{2(x+2)\cancel{(x-2)}}{5\cancel{(x-2)}} = \lim_{x \to 2} \frac{2(x+2)}{5}$$

$$\therefore \lim_{x \to 2} \frac{2x^2 - 8}{5x - 10} = \lim_{x \to 2} \frac{2(x+2)}{5} = \frac{2(2+2)}{5} = \frac{8}{5}$$

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{x\to 2}\frac{2x^2-8}{5x-10}=\frac{8}{5}}$$

**Solução:**

Mais um exemplo, agora envolvendo radicais: calcular $\lim_{x\to 1}\frac{2\sqrt{x}-2}{x^2-1}$.

**Solução:**

Primeiramente devemos entrar com o valor da tendência: $\lim_{x\to 1}\frac{2\sqrt{x}-2}{x^2-1}=\frac{2\sqrt{1}-2}{(1)^2-1}=\frac{0}{0}=?$

Temos, portanto, uma indeterminação envolvendo radical, que deverá ser racionalizada, multiplicando-se o numerador e o denominador pelo conjugado do numerador, obtendo a nova função para análise, que esperamos não ser indeterminada no ponto em questão:

$$\frac{2\sqrt{x}-2}{x^2-1}=\frac{2(\sqrt{x}-1)}{(x+1)(x-1)}=\frac{2(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x+1)(x-1)(\sqrt{x}+1)}=\frac{2\,\cancel{(x-1)}}{(x+1)\,\cancel{(x-1)}\,(\sqrt{x}+1)}=\frac{2}{(x+1)(\sqrt{x}+1)}$$

Substituindo a função dada pela nova função, e calculando o limite, temos:

$$\lim_{x\to 1}\frac{2\sqrt{x}-2}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{2}{(x+1)(\sqrt{x}+1)}=\frac{2}{(1+1)(\sqrt{1}+1)}=\frac{2}{2+2}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

$$\boxed{\therefore\ \lim_{x\to 1}\frac{2\sqrt{x}-2}{x^2-1}=\frac{1}{2}}$$

**Solução:**

Mais um exemplo: calcular $\lim_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+2x^2-5}{4x^3+x^2+2}$.

**Solução:**

Entrando com o valor da tendência, temos: $\lim_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+2x^2-5}{4x^3+x^2+2}=\dfrac{3(\infty)^3+2(\infty)^2-5}{4(\infty)^3+(\infty)^2+2}=\dfrac{\infty}{\infty}=?$

Para realizar a operação acima, é preciso notar que qualquer número vezes infinito resulta no próprio infinito, e a subtração ou adição do infinito com qualquer número real também resulta em infinito.

Neste caso, como temos uma indeterminação gerada por $\dfrac{\infty}{\infty}$; para eliminar a indeterminação, temos que dividir cada membro da função pela maior potência de "$x$":

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3+2x^2-5}{4x^3+x^2+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3x^3}{x^3}+\frac{2x^2}{x^3}-\frac{5}{x^3}}{\frac{4x^3}{x^3}+\frac{x^2}{x^3}+\frac{2}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\frac{2}{x}-\frac{5}{x^3}}{4+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^3}}=\frac{3+\cancel{\frac{2}{\infty}}-\cancel{\frac{5}{\infty^3}}}{4+\cancel{\frac{1}{\infty}}+\cancel{\frac{2}{\infty^3}}}=\frac{3}{4}$$

Então, temos que: $\boxed{\lim_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+2x^2-5}{4x^3+x^2+2}=\dfrac{3}{4}}$

**Solução:**

Note que as frações eliminadas resultam em valores insignificantes, pois qualquer número real dividido por infinito resulta em um número extremamente pequeno e que "tende a zero".

Caso, entrando com o valor de tendência, ocorra $\frac{\square^{*}}{0}$ (real não nulo dividido por zero), temos o que chamamos de *valor impróprio*, que será resolvido fazendo a pesquisa dos *limites laterais*, tal qual o primeiro exemplo feito. Veja só: calcular $\lim\limits_{x \to 0} \frac{4x^2}{5x^3}$.

**Solução:**

$$\lim_{x \to 0} \frac{4x^2}{5x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{4}{5x} = \frac{4}{0} \qquad \boldsymbol{V.I} \text{ (valor impróprio)}$$

Para calcular o limite da função quando $x \to 0$, será preciso calcular os limites laterais a partir de tabelas. Se existirem os limites laterais, e estes forem iguais, então existirá o valor limite da função. Caso contrário, diremos que não existe o limite da função quando o valor de x tende ao ponto em questão.

**Tabela 1:** $x \to 0^-$

| $x$ | $f(x) = \frac{4}{5x}$ |
|---|---|
| – 1 | – 0,8 |
| – 0,5 | – 1,6 |
| – 0,3 | – 2,66667 |
| – 0,1 | – 8 |
| – 0,01 | – 80 |
| – 0,001 | – 800 |
| – 0,001 | – 800 |
| ↓ $0^-$ | ↓ $-\infty$ |

**Tabela 2:** $x \to 0^+$

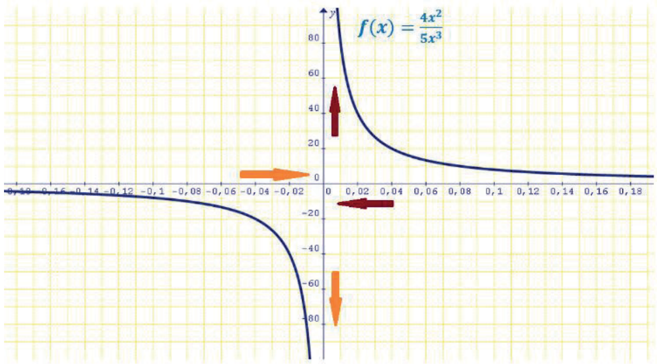
| $x$ | $f(x) = \frac{4}{5x}$ |
|---|---|
| 1 | 0,8 |
| 0,5 | 1,6 |
| 0,3 | 2,66667 |
| 0,1 | 8 |
| 0,01 | 80 |
| 0,001 | 800 |
| 0,001 | 800 |
| ↓ $0^+$ | ↓ $+\infty$ |

Observando as tabelas 1 e 2, podemos concluir que, embora existam os limites laterais, pois $\lim_{x \to 0^-} \frac{4x^2}{5x^3} = -\infty$ e $\lim_{x \to 0^+} \frac{4x^2}{5x^3} = +\infty$, eles são diferentes, contrariando a definição de valor limite de uma função.

Assim, concluímos que: $\boxed{\nexists \lim_{x \to 0} \frac{4x^2}{5x^3}}$

Lemos: “não existe o valor limite da função quando o valor de $x$ tende a zero”.

Graficamente, temos:




Note que: se $x$ tende a **zero pela direita**, o valor da função tende a $+\infty$. Caso $x$ tenda a **zero pela esquerda**, o valor da função tenderá a $-\infty$, caracterizando a não existência do valor limite da função quando o valor de $x$ tende a zero.

**Solução:**

Note que a curva $f(x)=\dfrac{4x^2}{5x^3}$ "tende" a interseccionar os eixos coordenados, porém isso não acontece. Denominamos a reta *y = 0*, ou seja, o eixo O***x***, como a assíntota horizontal da função, e a reta *x = 0*, ou seja, o eixo **Ou**, como a assíntota vertical da função. Definimos assíntota como a reta para qual a curva tende, sem jamais alcançá-la.

**Para saber mais:**

Está curioso sobre as assíntotas? Quer saber a importância desse conhecimento no traçado do gráfico de funções? Nos links a seguir você poderá assistir ao vídeo.

**Assíntotas verticais** | **Assíntotas horizontais**

**Biblioteca Pearson**


BASSANEZI, R. C. **Introdução ao cálculo e aplicações.** São Paulo: Contexto, 2015. p. 58. Disponível em: https://plataforma.bvirtual.com.br/Acervo/Publicacao/31203. Acesso em: 02 jul. 2021.

CASTANHEIRA, N. P.; LEITE, A. E. **Tópicos de Cálculo I:** limites, derivadas e integrais. Curitiba: InterSaberes, 2017. p. 21. Disponível em: https://plataforma.bvirtual.com.br/Acervo/Publicacao/49388. Acesso em: 02 jul. 2021.

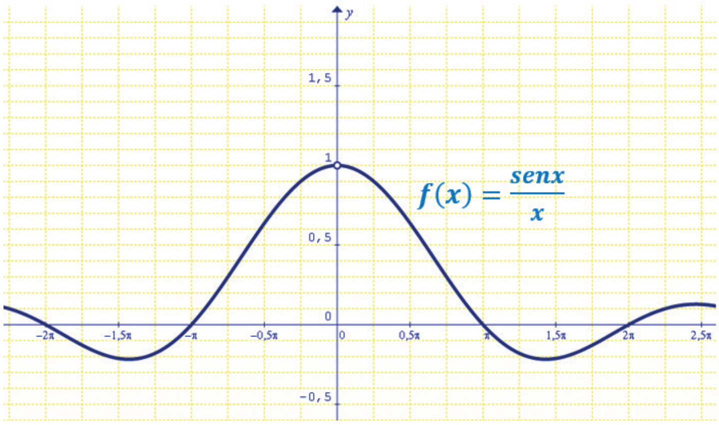
FACCIN, G. M. **Elementos de cálculo diferencial e integral.** Curitiba: InterSaberes, 2015. p. 52. Disponível em: https://plataforma.bvirtual.com.br/Acervo/Publicacao/30379. Acesso em: 02 jul. 2021.
FERNANDES, D. B. (Org.). **Cálculo diferencial.** São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2014. p. 49. Disponível em: https://plataforma.bvirtual.com.br/Acervo/Publicacao/22092. Acesso em: 02 jul. 2021.
FLEMMING, D. M.; GONÇALVES, M. B. **Cálculo A:** funções, limite, derivação, integração. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2006. p. 84. Disponível em: https://plataforma.bvirtual.com.br/Acervo/Publicacao/748. Acesso em: 02 jul. 2021.
LARRY, G. **Cálculo em quadrinhos.** São Paulo: Blucher, 2014. p. 61. Disponível em: https://plataforma.bvirtual.com.br/Acervo/Publicacao/164654. Acesso em: 02 jul. 2021.
THOMAS, G. B. et al. **Cálculo.** v.1. 12. ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2012. p. 98. Disponível em: https://plataforma.bvirtual.com.br/Acervo/Publicacao/3376. Acesso em: 02 jul. 2021.

## 1.2 Limites Fundamentais: Trigonométrico e Exponencial

Denominamos limites fundamentais aqueles cujo valor é conhecido e a partir do qual calcularemos os limites envolvendo funções semelhantes, sejam trigonométricas ou exponenciais. Tais limites serão úteis quando nos depararmos com casos de indeterminações do tipo $\frac{0}{0}$, $1^{\infty}$ e $\infty^{0}$.

Definimos o **limite trigonométrico fundamental** como: $\lim_{x \to 0} \frac{senx}{x} = 1$ .

Note, pelo gráfico abaixo, que a razão $\frac{\text{sen}\, x}{x}$, com $x$ tomado em radianos, se aproximará de 1 quando o valor de $x$ se aproximar de zero.




Desse modo, é possível agora solucionarmos diversos casos de limites envolvendo funções trigonométricas. Vamos aos exemplos: calcular $\lim\limits_{x\to 0} \frac{tgx}{x}$.

**Solução:**

$$\lim_{x\to 0}\frac{tgx}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\cdot\frac{1}{x} = \lim_{x\to 0}\left[\frac{\operatorname{sen} x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}\right]$$

Utilizando a propriedade do produto de limites, temos: $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{\operatorname{sen} x}{x}\cdot\frac{1}{x}\right] = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}$

Como: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$ e $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\cos x} = 1$, pois, $\cos(0) = 1$ temos que

$$\lim_{x\to 0}\frac{tgx}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x} = 1\cdot 1 = 1$$

$$\therefore\ \boxed{\lim_{x\to 0}\frac{tgx}{x} = 1}$$

**Solução:**

Mais um exemplo: calcular $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 10x}{\operatorname{sen} 7x}$.

**Solução:**

Forçando o aparecimento do limite trigonométrico fundamental, vamos multiplicar o numerador da fração por $\frac{10}{10}$ e o denominador por $\frac{7}{7}$:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} 10x}{\operatorname{sen} 7x} = \lim_{x \to 0} \frac{\dfrac{\operatorname{sen} 10x}{x}}{\dfrac{\operatorname{sen} 7x}{x}} = \lim_{x \to 0} \frac{\dfrac{10}{10} \cdot \dfrac{\operatorname{sen} 10x}{x}}{\dfrac{7}{7} \cdot \dfrac{\operatorname{sen} 7x}{x}} = \lim_{x \to 0} \frac{10 \cdot \cancel{\dfrac{\operatorname{sen} 10x}{10x}}}{7 \cdot \cancel{\dfrac{\operatorname{sen} 7x}{7x}}} = \frac{10 \cdot 1}{7 \cdot 1} = \frac{10}{7}$$

$$\therefore \quad \boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} 10x}{\operatorname{sen} 7x} = \frac{10}{7}}$$

**Solução:**

Mais um exemplo: calcular $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{2x^2}$.

**Solução:**

Usando a identidade trigonométrica fundamental: $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$, temos:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{2x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{2x^2 (1 + \cos x)} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos^2 x}{2x^2 (1 + \cos x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2} \cdot \frac{1}{2(1 + \cos x)} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{1}{2(1 + \cos x)} =$$

$$= \quad 1 \quad . \quad 1 \quad . \quad \frac{1}{4} \quad = \frac{1}{4}$$

$$\therefore \boxed{\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{2x^2} = \frac{1}{4}}$$

**Solução:**

Definimos o **limite exponencial fundamental** como: $\lim_{x \to \pm\infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$ ou, $\lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$, onde "$e$" é o número de Euler, o número irracional 2,7182..... Como a demonstração desta proposição envolve conceito de séries, assunto além do estágio de estudo atual, ela será omitida.

Aplicação: calcular $\lim_{x \to 0} ln(1 + x)^{\frac{1}{x}}$.

**Solução:**

Aplicando propriedades dos limites, escrevemos que:

$$\lim_{x \to 0} ln(1 + x)^{\frac{1}{x}} = \ln\left[\lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}}\right] = \ln(e) = 1$$

$$\therefore \boxed{\lim_{x \to 0} ln(1 + x)^{\frac{1}{x}} = 1}$$

**Solução:**

Propostos:

Calcular os limites: 1. $\lim_{x \to \frac{3\pi}{2}} (1 + cosx)^{\frac{1}{cosx}}$ 2. $\lim_{x \to \infty} (1 + \frac{10}{x})^x$ 3. $\lim_{x \to \infty} (1 + \frac{10}{x})^x$

**Solução:**

## 1.3 Continuidade de Função: definição

Quando uma função $y = f(x)$ tem o gráfico esboçado sobre seu domínio em um único movimento contínuo, *sem levantar o lápis do papel*, temos o que chamamos de *função contínua.*

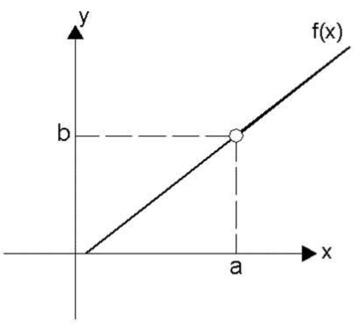
Matematicamente, definimos uma função $f(x)$ como contínua num dado ponto $x = a$ se:

**I** Existir o valor da função quando $x = a$, ou seja, $\exists\, f(a)$;
**II** Existir o limite da função quando $x$ tender ao valor $a$, ou seja, $\exists \lim\limits_{x \to a} f(x)$;
**III** O valor da função no ponto $a$ é igual ao valor do limite da função quando $x$ tende ao valor $a$, ou seja, $f(a) = \lim\limits_{x \to a} f(x)$

Ocorrendo as condições descritas em I, II e III, diremos que $f(x)$ é **continua** em $\boldsymbol{x = a}$, caso contrário, diremos que $f(x)$ é **descontínua** em $\boldsymbol{x = a}$, ou então que $f(x)$ **não é contínua** em $\boldsymbol{x = a}$.

### 1.3.1 Continuidade de Função: processo algébrico e geométrico

Analisando cada um dos gráficos a seguir, concluímos:

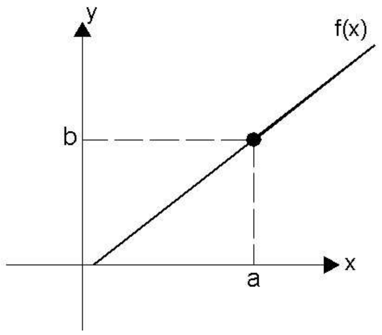



**I** $\nexists\, f(a)$, pois $a \notin$ ao domínio da função

**II** $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = b$ e $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = b$, então $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$

**III** Como $\nexists\, f(a)$, não atende à condição III

$\therefore$ $f(x)$ é descontínua em $x = a$.

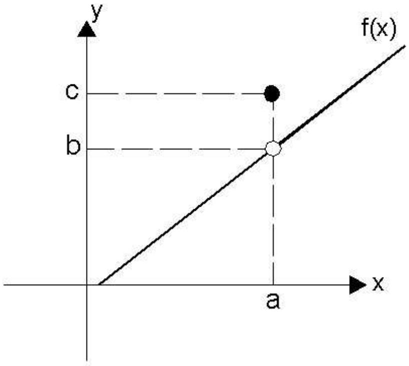



**I** $\exists f(a) \Rightarrow f(a) = b$

**II** $\exists \lim\limits_{x \to a} f(x) \Rightarrow \lim\limits_{x \to a} f(x) = b$

**III** $f(a) = \lim\limits_{x \to a} f(x)$

$\therefore$ $f(x)$ é contínua em $x = a$.




**I** $\exists f(a) = c$

**II** $\exists \lim\limits_{x \to a} f(x) = b$

**III** $f(a) \neq \lim\limits_{x \to a} f(x)$

$\therefore$ $f(x)$ é descontínua em $x = a$.

**Solução:**

Vamos a um exemplo de aplicação do conceito de continuidade, com resolução algébrica:

Dada a função $f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & x \geq 1 \\ x^2 + 3 & < 1 \end{cases}$, verifique se $f(x)$ é contínua em $x = 1$.

**Solução:**

Verificando a ocorrência das condições **I** , **II** e **III**, temos:

**I** $\exists f(a)$ ?

Como: $a = 1 \Rightarrow f(1) = 2(1) + 1 = 3 \quad \therefore \quad f(1) = 3$

**I** $\exists \lim\limits_{x \to a} f(x)$ ?

$$\lim_{x \to a} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x \to 1^-} x^2 + 3 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} 2x + 1 \end{cases} = \begin{cases} \lim\limits_{x \to 1^-} (1)^2 + 3 = 4 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} 2(1) + 1 = 3 \end{cases} \Rightarrow \nexists \lim_{x \to a} f(x)$$

Embora existam os limites laterais, eles são diferentes, assim concluímos que $\nexists \lim_{x \to a} f(x)$, portanto podemos afirmar que a função $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & x \geq 1 \\ x^2+3 & < 1 \end{cases}$ é descontínua no ponto $x = 1$, pois não ocorrem as condições **II** e **III**.

**Solução:**

Para sedimentar o conceito, assista ao vídeo com a solução algébrica do exercício proposto.

Dada a função definida por várias sentenças $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{se} \quad -1 \leq x < 0 \\ 2x & \text{se} \quad 0 < x < 1 \\ 1 & \text{se} \quad x = 1 \\ -2x + 4 & \text{se} \quad 1 < x < 2 \\ 0 & \text{se} \quad 2 < x < 3 \end{cases}$ verifique se:

a) Existe $f(-1)$ ?

b) Existe $\lim_{x \to -1^+} f(x)$?

c) Ocorre: $\lim_{x \to -1^+} f(x) = f(-1)$ ?

d) $f$ é contínua em $x = -1$?

e) Existe $f(1)$ ?

f) Existe $\lim_{x \to 1} f(x)$?

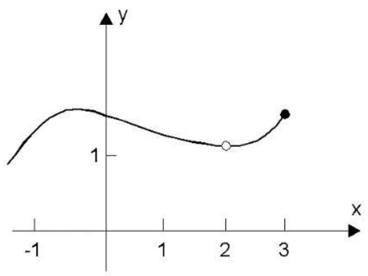
g) Ocorre: $\lim_{x \to 1} f(x) = f(1)$ ?

h) $f$ é contínua em $x = 1$?

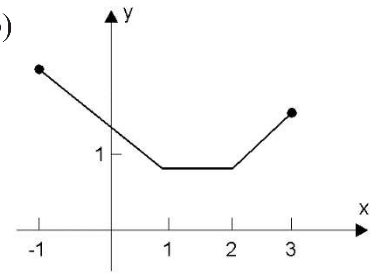
**Solução:**

Para sedimentar o conceito, veja o vídeo com a solução geométrica do exercício proposto: Analise os gráficos abaixo e verifique se as funções representadas são contínuas no intervalo [-1, 3]. Caso não sejam, indicar onde ocorre a descontinuidade e a justificativa pertinente.

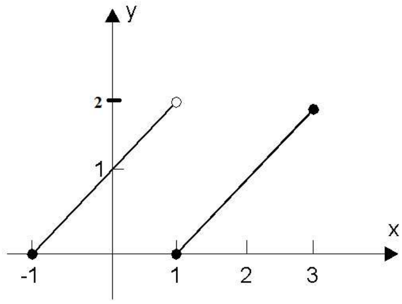
a)




b)




c)




**Solução:**

## 1.4 Síntese da Unidade

Nesta Unidade, estudamos o conceito intuitivo e gráfico de valor limite de função. Vimos o que é limite lateral e a definição formal de limite. Aprendemos como calcular limites usando processos algébricos e por análise gráfica. Vimos também o conceito de indeterminação de função, bem como os principais casos possíveis, além de como “levantar” tais indeterminações, especificamente nos casos $\frac{0}{0}$ e $\frac{\infty}{\infty}$. Conceituamos os limites fundamentais, trigonométrico e exponencial, essenciais para a resolução de limites envolvendo as funções trigonométricas e exponenciais. Finalizando a Unidade, vimos o conceito de continuidade de função e os processos algébrico e gráfico, que nos permitem discutir se uma função é contínua ou descontínua num dado ponto em questão.

## 1.5 Para Saber Mais: Biblioteca Pearson/Sibi Unitau


BASSANEZI, R. C. **Introdução ao cálculo e aplicações.** São Paulo: Contexto, 2015. Disponível em: https://plataforma.bvirtual.com.br/Acervo/Publicacao/31203. Acesso em: 02 jul. 2021.

CASTANHEIRA, N. P.; LEITE, A. E. **Tópicos de Cálculo I:** limites, derivadas e integrais. Curitiba: InterSaberes, 2017. Disponível em: https://plataforma.bvirtual.com.br/Acervo/Publicacao/49388. Acesso em: 02 jul. 2021.

FACCIN, G. M. **Elementos de cálculo diferencial e integral.** Curitiba: InterSaberes, 2015. Disponível em: https://plataforma.bvirtual.com.br/Acervo/Publicacao/30379. Acesso em: 02 jul. 2021.

FERNANDES, D. B. (Org.). **Cálculo diferencial.** São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2014. Disponível em: https://plataforma.bvirtual.com.br/Acervo/Publicacao/22092. Acesso em: 02 jul. 2021.

FLEMMING, D. M.; GONÇALVES, M. B. **Cálculo A:** funções, limite, derivação, integração. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2006. Disponível em: https://plataforma.bvirtual.com.br/Acervo/Publicacao/748. Acesso em: 02 jul. 2021.

LARRY, G. **Cálculo em quadrinhos.** São Paulo: Blucher, 2014. Disponível em: https://plataforma.bvirtual.com.br/Acervo/Publicacao/164654. Acesso em: 02 jul. 2021.

THOMAS, G. B. et al. **Cálculo.** v.1. 12. ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2012. Disponível em: https://plataforma.bvirtual.com.br/Acervo/Publicacao/3376. Acesso em: 02 jul. 2021.


Cálculo – Um curso moderno e suas aplicações:
https://integrada.minhabiblioteca.com.br/books/978-85-216-2909-2

Frank Ayres: https://integrada.minhabiblioteca.com.br/books/9788565837446

James Stewart: https://integrada.minhabiblioteca.com.br/books/9788522126859

### Aplicativos Gráficos

Geogebra: https://www.geogebra.org

Graphmatica: http://www.graphmatica.com/

Microsoft Mathematics: https://microsoft-mathematics.br.uptodown.com/windows

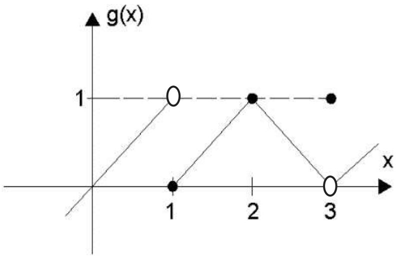
### Vídeo Khan Academy

Limites e Continuidade de Função:

https://pt.khanacademy.org/math/calculus-home

## 1.6 Aprendendo

1. Dado o gráfico abaixo, pede-se determinar:




a) $\lim\limits_{x \to 1} g(x)$ b) $\lim\limits_{x \to 2} g(x)$ c) $\lim\limits_{x \to 3} g(x)$

**Solução:**

2. Calcular os limites usando o conceito de limite fundamental:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{sen2x}{3x} =$ b) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos x}{\operatorname{cotg} x} =$ c) $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^{x+5} =$

**Solução:**

3. Determine o valor de $k$ para que a função seja contínua no ponto indicado, em cada caso:

a) $f(x)=\begin{cases} 4-x+x^3 & \text{se } x\le 1 \\ 9-kx^2 & \text{se } x>1 \end{cases}$, *em x = 1*

b) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^3-8}{x^2-4} & \text{se } x\neq 2 \\ k & \text{se } x=2 \end{cases}$, *em x = 2*

**Solução:**

4. Faça o esboço do gráfico da função que atenda, simultaneamente, as condições:

a) $\exists\ f(a)$ ; $\exists\ \lim\limits_{x\to a} f(x)$ e $f(a)\neq \lim\limits_{x\to a} f(x)$

b) $\exists\ f(a)$ ; $\exists\ \lim\limits_{x\to a} f(x)$

c) $\exists\ f(a)$ ; $\exists\ \lim\limits_{x\to a} f(x)$ e $f(a)=\lim\limits_{x\to a} f(x)$

**Solução:**

5. Dadas as funções a seguir, verifique para qual valor de $x$ ocorrerá $f(x)$:

(I) $f(x)$ é indeterminada (II) $f(x)$ é descontínua (III) $f(x)$ é valor impróprio

a) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{(x-1)(x-2)}$ b) $f(x)=\dfrac{x^2+3x-4}{x^3+x^2-2x}$ c) $f(x)=\dfrac{x^2-3x-10}{x^3-2x^2-8x}$

**Solução:**

6. Dadas as funções a seguir, escreva a equação das assíntotas verticais e horizontais, quando houver e, a seguir, faça um esboço do gráfico da situação.

a) $y = \dfrac{5}{x-2}$  b) $y = \dfrac{2x+1}{x-1}$

**Solução:**

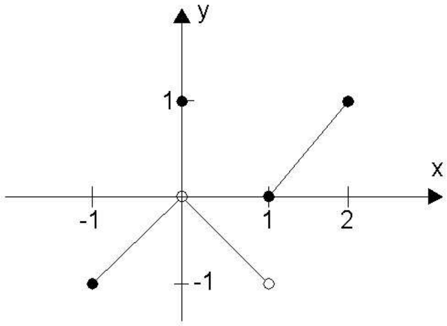
7. Dadas as funções a seguir, determine os valores de $x$, $x \in \mathbb{R}$, para os quais as funções são contínuas:

a) $f(x) = \dfrac{3x-5}{2x^2-x-3}$  b) $f(x) = \sqrt{2x-3} + x^2$  c) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt[3]{x-4}}$

**Solução:**

## 1.7 Atividade Praticando

1. Dado o gráfico a seguir, pede-se para determinar:




a) $\lim_{x \to 1} f(x)$ b) $\lim_{x \to 0} f(x)$ c) $\lim_{x \to 2} f(x)$

d) $f(0)$ e) $f(-1)$ f) $f(2)$ g) $f(1)$

2. Calcular os limites usando o conceito de limite fundamental:

a) $\lim_{x \to 0} \frac{sen2x}{3x} = \frac{2}{3}$ b) $\lim_{x \to 0} \frac{senx - tgx}{1 - \cos x} =$ c) $\lim_{x \to \infty} (\frac{x}{1+x})^x =$

3. Determine o valor de $k$ para que a função seja contínua no ponto indicado, em cada caso:

a) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3+1}{x^2-1} & \text{se } x \neq -1 \\ k & \text{se } x = -1 \end{cases}$, em $x = -1$ b) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-1}{x^2-1} & \text{se } x \neq 1 \\ k & \text{se } x = 1 \end{cases}$, em $x = 1$.

4. Faça o esboço do gráfico da função $f(x) = \begin{cases} 0 \ se \ x \leq 0 \\ x \ se \ x > 0 \end{cases}$ e analise a sua continuidade.

5. Dadas as funções a seguir, verifique para qual valor de $x$ ocorrerá $f(x)$:

(I) $f(x)$ é indeterminada (II) $f(x)$ é descontínua (III) $f(x)$ é valor impróprio

a) $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2-4x3}$ b) $f(x) = \frac{x^2+2x-8}{x^3-4x}$

6. Dadas as funções a seguir, escreva a equação das assíntotas verticais e horizontais, quando houver, e a seguir faça um esboço do gráfico da situação.

a) $y = \frac{5}{x}$ b) $y = \frac{5-3x}{x+1}$

7. Dadas as funções a seguir, determine os valores de $x$, $x \in \mathbb{R}$, para os quais as funções são descontínuas:

a) $f(x) = \dfrac{3}{x^2 + x - 6}$

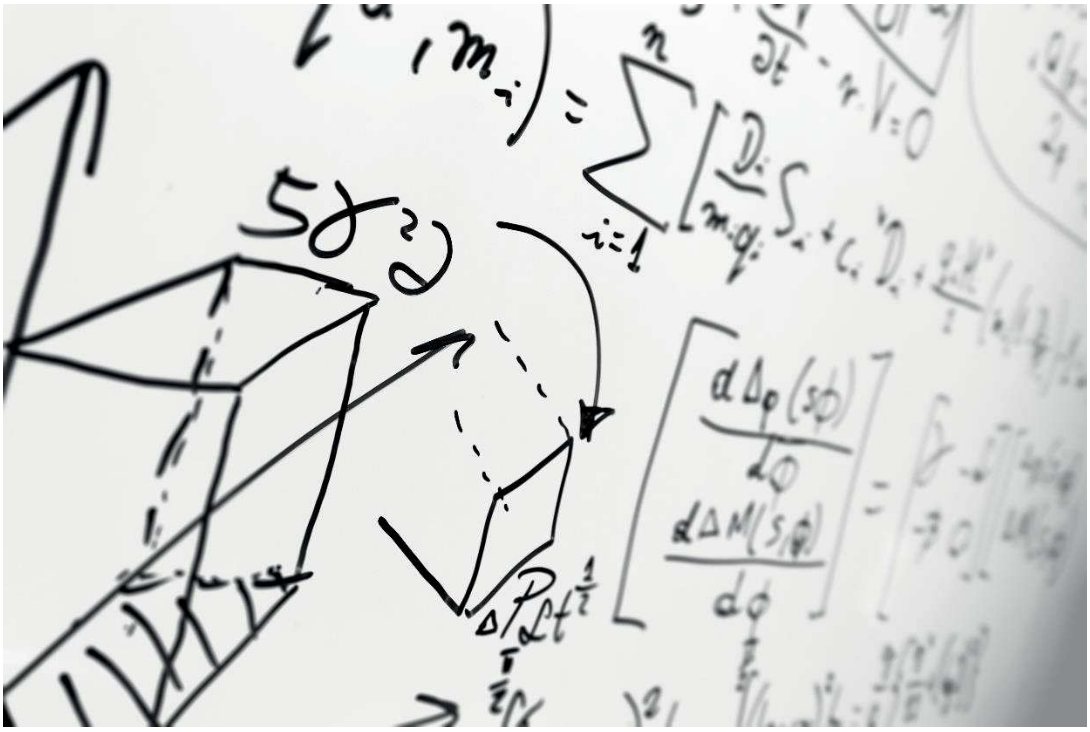
b) $f(x) = \dfrac{5}{x^2 - 4x - 12}$

c) $f(x) = \dfrac{x - 4}{x^2 - x - 12}$

**Solução:**

# Unidade II
# Derivadas I
# Conceitos e Regras Operatórias

Nesta Unidade estudaremos o significado e o conceito de derivada de uma função, abordando o conceito algébrico, como taxa de variação da função, e o conceito geométrico, como o coeficiente angular da reta tangente a curva num dado ponto. Aprenderemos como derivar funções, seja usando a definição ou “regra dos 4 passos”, e também como usar a “tabela de derivadas” de modo a conferir maior agilidade ao processo. Veremos os casos especiais de derivação, úteis ao derivarmos um produto ou uma divisão entre duas ou mais funções, conhecidas como “regra do produto” e “regra do quociente”. Veremos também a “regra da cadeia”, necessária ao derivarmos uma função composta ou função de função. Estes serão nossos objetos de estudo.



Fonte: Freepik

## 2.1 Conceito Algébrico: Taxa de variação de função

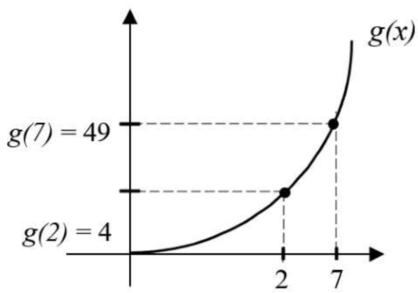
Dada uma grandeza *g*, que expressa a área de um quadrado de lado *x*, temos que $g(x) = x^2$. Vamos analisar o comportamento da grandeza *g* quando *x* assume valores no intervalo [2, 7]:

Então:

Se $x = 2 \Rightarrow g(2) = 2^2 \therefore g(2) = 4$

Se $x = 7 \Rightarrow g(7) = 7^2 \therefore g(7) = 49$

Graficamente, representamos:



A partir do gráfico obtido, definiremos como **Taxa de Variação Média** da função $g(x)$, indicada por TVM, no intervalo [2, 7] à razão dada pela variação da função no eixo *y*, denominada $\Delta y$, pela variação da função no eixo *x*, denominada $\Delta x$ e, matematicamente, indicamos por:

$$TVM_{g(x)_{[2,7]}} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Assim, temos que: $TVM_{g(x)_{[2,7]}} = \frac{g(7)-g(2)}{7-2} \quad \Longrightarrow \quad TVM_{g(x)_{[2,7]}} = \frac{49-4}{7-2} = \frac{45}{5} = \frac{9}{1}$

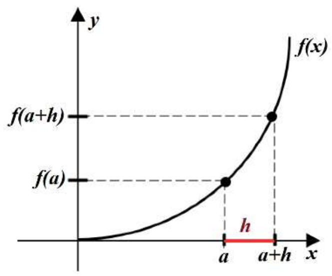
$$\therefore \ TVM_{g(x)_{[2,7]}} = \frac{9}{1}$$

A TVM nos mostra que, para cada unidade de variação da função *g(x)*, ocorrida no eixo *x*, ocorrerá 9 unidades de variação no eixo *y*, no intervalo [2, 7].

Genericamente, sendo *f(x)* uma função e *h* uma variação ocorrida no eixo *x* num intervalo [a,b], podemos escrever que:

$$TVM_{f(x)_{[a,b]}} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Graficamente:




A partir da TVM, definiremos a **Taxa de Variação Instantânea** (TVI) como o valor limite da Taxa de Variação Média quando o valor *h*, variação horizontal da função, for muito pequeno, ou seja, tender a zero.

Matematicamente, escrevemos:

$$TVI_{f(x)_{[a,b]}} = \lim_{h \to 0} TVM \quad \Longrightarrow \quad TVI_{f(x)_{[a,b]}} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Definimos a **Taxa de Variação Instantânea** como a **derivada da função *f(x)***, existindo o limite da função em questão, e passaremos a indicá-la por $f'(x)$. Lemos: "efe linha de *x*".

Assim, matematicamente, escrevemos que: $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$

Desse modo, algebricamente, entendemos que a derivada de uma função nada mais é que sua taxa de variação instantânea. Vamos um exemplo prático de determinação da derivada de uma função usando a definição, ou **regra dos 4 passos**. Para determinar a derivada pela definição, ou regra dos 4 passos, em um ponto onde $x = a$ fazemos:

**Passo I:** Encontrar $f(a)$ e $f(a+h)$

**Passo II:** Encontrar $\Delta f$, onde: $\Delta f = f(a+h) - f(a)$

**Passo III:** Encontrar a TVM, onde: TVM $= \frac{\Delta f}{h} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$

**Passo IV:** Encontrar a TVI ou $f'(a)$, onde:

$$TVI = f'(a) = \lim_{h \to 0} TVM = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

É interessante notar que a regra dos 4 passos nada mais é que os passos dados na construção do gráfico que definiu a taxa de variação de uma função

**Solução:**

Determinar a derivada da função $f(x) = 3x^2 - 5x + 4$ no ponto de abscissa $x = 2$, usando a definição ou regra dos 4 passos.

**Solução:**

Para calcular $f'(a)$, onde $a = 2$, a partir da definição algébrica de derivada, seguimos a regra dos 4 passos:

**I)** *Encontrar $f(a)$ e $f(a+h)$*

$$f(1) = 3(1)^2 - 5(1) + 4 = 2 \;\therefore\; f(1) = 2$$

$$f(1+h) = 3(1+h)^2 - 5(1+h) + 4 \implies f(1+h) = 3(1+2h+h^2) - 5 - 5h + 4$$

$$\therefore\; f(1+h) = 3 + 6h + 3h^2 - 1 - 5h = 3h^2 + h + 2 \Rightarrow f(1+h) = 3h^2 + h + 2$$

**II)** *Encontrar $\Delta f = f(a+h) - f(a)$*

$$\Delta f = f(1+h) - f(1) \implies \Delta f = 3h^2 + h + 2 - 2 \;\therefore\; \Delta f = 3h^2 + h$$

**III)** *Encontrar $TVM = \frac{\Delta f}{h} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$*

$\mathrm{TVM} = \frac{\Delta f}{h} = \frac{3h^2+h}{h}$ (note que, para cada variação $h$ ocorrida no eixo $x$ , ocorrerá $3h^2 + h$ de variação no eixo $y$)

**IV)** *Encontrar $TVI = f'(a) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$*

$TVI = f'(1) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{3h^2+h}{h} \implies f'(1) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{h(3h+1)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{\cancel{h}(3h+1)}{\cancel{h}} = \lim\limits_{h\to 0} 3h + 1 = 3(0) + 1 = 1$

$$\boxed{f'(1) = 1}$$

Ou seja, a derivada da função dada em $x = 1$ será 1.

**Solução:**

Mais um exemplo de aplicação do conceito de derivada como taxa de variação de uma função.

Determinar a derivada da função $f(x) = \sqrt{3x+1}$, em $x = 2$, usando a definição:

**Solução**

**I)** $f(a)$ *e* $f(a+h)$

$$f(2) = \sqrt{3(2)+1} = \sqrt{7} \quad \therefore \quad f(2) = \sqrt{7}$$

$$f(2+h) = \sqrt{3(2+h)+1} = \sqrt{7+3h} \quad \therefore \quad f(2+h) = \sqrt{7+3h}$$

**II)** $\Delta f = f(a+h) - f(a)$

$$\Delta f = f(2+h) - f(2) = \sqrt{7+3h} - \sqrt{7} \quad \therefore \quad \Delta f = \sqrt{7+3h} - \sqrt{7}$$

**III)** $TVM = \frac{\Delta f}{h} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

$$\text{TVM} = \frac{\Delta f}{h} = \frac{\sqrt{7+3h}-\sqrt{7}}{h} \qquad \therefore \quad \text{TVM} = \frac{\sqrt{7+3h}-\sqrt{7}}{h}$$

**IV)** $TVI = f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

$$f'(2) = TVI = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{7+3h}-\sqrt{7}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\left(\sqrt{7+3h}-\sqrt{7}\right)}{h} \cdot \frac{\left(\sqrt{7+3h}+\sqrt{7}\right)}{\left(\sqrt{7+3h}+\sqrt{7}\right)} = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{7}+3h-\cancel{7}}{h\left(\sqrt{7+3h}+\sqrt{7}\right)}$$

$$f'(2)=\lim_{h\to 0}\frac{3\cancel{h}}{\cancel{h}(\sqrt{7+3h}+\sqrt{7})}=\lim_{h\to 0}\frac{3}{\sqrt{7+3h}+\sqrt{7}}=\frac{3}{\sqrt{7+3(0)}+\sqrt{7}}=\frac{3}{\sqrt{7}+\sqrt{7}}=\frac{3}{2\sqrt{7}}.\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}}=\frac{3\sqrt{7}}{14}$$

$$\therefore\ f'(2)=\frac{3\sqrt{7}}{14}$$

**Solução:**

### Para saber mais: Biblioteca Pearson


BASSANEZI, R. C. **Introdução ao cálculo e aplicações.** São Paulo: Contexto, 2015. p. 74. Disponível em: https://plataforma.bvirtual.com.br/Acervo/Publicacao/31203. Acesso em: 02 jul. 2021.

FERNANDES, D. B. (Org.). **Cálculo diferencial.** São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2014. p. 57. Disponível em: https://plataforma.bvirtual.com.br/Acervo/Publicacao/22092. Acesso em: 02 jul. 2021.

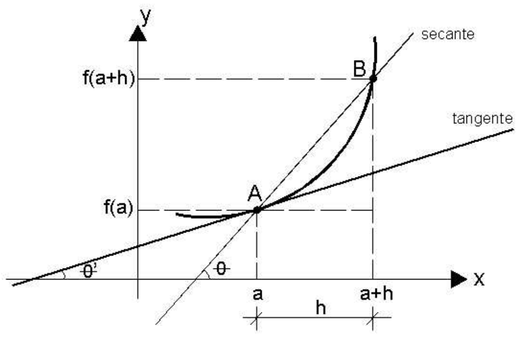
FLEMMING, D. M.; GONÇALVES, M. B. **Cálculo A:** funções, limite, derivação, integração. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2006. p. 118. Disponível em: https://plataforma.bvirtual.com.br/Acervo/Publicacao/748. Acesso em: 02 jul. 2021.

THOMAS, G. B. et al. **Cálculo, volume 1.** 12ª ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2012. p. 140. Disponível em: https://plataforma.bvirtual.com.br/Acervo/Publicacao/3376. Acesso em: 02 jul. 2021.


## 2.1.1 Conceito Geométrico: Coeficiente angular da reta tangente à curva num ponto

A definição de derivada é também motivada pelo problema de se encontrar a reta tangente a uma curva em um ponto arbitrário. A palavra tangente vem do latim *tangens*, e significa “tocar”, “encostar”.

**Equação da reta tangente à curva:** para encontrar a equação da reta tangente ao gráfico de uma função $y = f(x)$ em um dado ponto $A$, vamos, inicialmente, considerar a inclinação da reta secante passando por $A$ e $B$. Veja pelo gráfico:




O coeficiente angular (inclinação) da reta secante é dado por: $m_{\sec} = tg\theta = \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

Note que o coeficiente angular da reta secante é igual a TVM. Supondo que a reta secante vá se aproximando da tangente, ou seja, que $h \to 0$, a inclinação da reta secante $m_{\sec}$ aproximar-se-á da inclinação da reta tangente $m$. Se a reta tangente existir, a sua inclinação é calculada como o limite da reta secante quando $h$ tende a zero:

$$m = tg\theta = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Portanto, temos que o coeficiente angular da reta tangente será igual a TVI, e definimos que "*o valor da derivada da função em um dado ponto representa o coeficiente angular da reta tangente à curva naquele ponto*". Note que a equação da reta tangente à curva por um ponto $P(x_0, y_0)$ e de coeficiente angular dado por $m$ (da Geometria Analítica) é igual a:

$y - y_0 = m(x - x_0)$ e, como $m$ é igual a $f'(x_0)$, temos que:

$$y - y_0 = f'(x_0)\cdot(x - x_0)$$

Lembrando dos estudos em Geometria Analítica do 2º grau, sabemos que retas perpendiculares são aquelas cujo produto dos coeficientes angulares é igual a $-1$, ou seja:

se $r \perp s \Rightarrow m_r \cdot m_s = -1 \quad \therefore \; m_r = -\dfrac{1}{m_s}$.

Assim, para obtermos a equação da reta normal à curva em uma abscissa $x_0$ basta fazer:

$$\boxed{y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)}$$

Vamos a uma aplicação do conceito visto: determinar a equação da reta tangente e da reta normal à curva $f(x) = 3x^2 + 4x + 5$, no ponto de abscissa $-1$.

**Solução:**

**I)** Cálculo das coordenadas do ponto $P(x_0, y_0)$:

Se $x_0 = -1 \Rightarrow y_0 = 3(-1)^2 + 4(-1) + 5 = 4$

$\therefore (-1,\; 4)$

**II)** Cálculo da derivada da função:

Para derivar a função vamos usar a **Regra Prática** em substituição a **Regra dos 4 Passos**.

Funções do tipo: $f(x) = ax^n$ terão derivada: $f'(x) = n \cdot a \cdot x^{n-1}$, veja o exemplo:

$$f(x) = 3x^2 + 4x + 5x^0 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 6x + 4 \quad \Rightarrow \quad f'(-1) = 6(-1) + 4 = -2 \quad \therefore \quad f'(-1) = -2$$

**III)** Cálculo da equação da reta tangente:

$$y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0) \quad \Rightarrow \quad y - 4 = -2 \cdot (x + 1)$$

Equação *geral* da reta tangente: $2x + y - 2 = 0$

Equação *reduzida* da reta tangente: $y = -2x + 2$

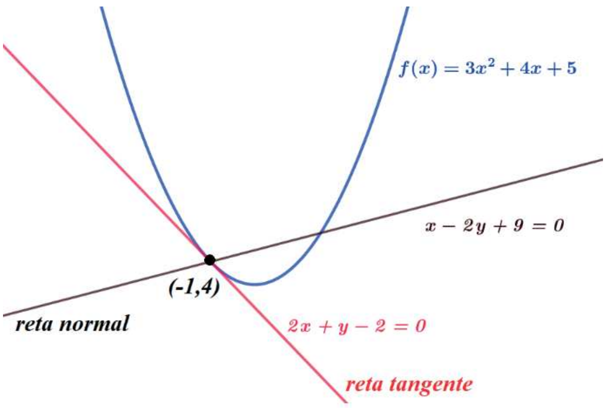
**IV)** Cálculo da equação da reta normal:

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) \quad \Rightarrow \quad y - 4 = \frac{-1}{-2}(x+1) \quad \therefore \quad 2y - 8 = x + 1$$

Equação *geral* da reta normal: $x - 2y + 9 = 0$

Equação *reduzida* da reta normal: $y = \frac{1}{2}x + \frac{9}{2}$

Esboço do gráfico da situação:




**Solução:**

### Para saber mais: Biblioteca Pearson


FERNANDES, D. B. (Org.). **Cálculo diferencial.** São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2014. p. 55. Disponível em: https://plataforma.bvirtual.com.br/Acervo/Publicacao/22092. Acesso em: 02 jul. 2021.

FLEMMING, D. M.; GONÇALVES, M. B. **Cálculo A:** funções, limite, derivação, integração. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2006. p. 116. Disponível em: https://plataforma.bvirtual.com.br/Acervo/Publicacao/748. Acesso em: 02 jul. 2021.

THOMAS, G. B. et al. **Cálculo, volume 1.** 12ª ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2012. p. 117. Disponível em: https://plataforma.bvirtual.com.br/Acervo/Publicacao/3376. Acesso em: 02 jul. 2021.


## 2.2 Regras de derivação de funções usuais

Calcular a derivada de uma função usando a definição ou regra dos 4 passos é bastante trabalhoso e, em alguns casos, impossível nesse estágio de conhecimento. Desse modo, vamos estudar o que chamamos de regras de derivação ou "fórmulas" que permitem determinar a derivada de uma função de modo bastante prático.

Considerando que: $f = f(x), u = u(x), v = v(x)$ , $k, a, n = c^{tes}$ , $e = 2{,}7182 \ldots$ número de Euler, temos que:

1. Derivada de uma constante: $f(x) = k \implies f'(x) = 0$

- $f(x) = -1 \implies \boxed{f'(x) = 0}$

2. Derivada de potência: $f(x) = kx^n \implies f'(x) = k \cdot n \cdot x^{n-1}$ com $n \in \mathbb{Z}_+^*$

- $f(x) = -4x^2 + 7x - 1 \implies f'(x) = -4 \cdot (2) \cdot x^{2-1} + 7 \cdot (1) \cdot x^{1-1} = -8x + 7 \therefore$ $\boxed{f'(x) = -8x + 7}$

- $f(x) = 3\sqrt[4]{x} \implies f'(x) = 3x^{\frac{1}{4}} = 3 \cdot \frac{1}{4} \cdot x^{\frac{1}{4}-1} = \frac{3}{4}x^{-\frac{3}{4}} \quad \therefore \boxed{f'(x) = \frac{3}{4}x^{-\frac{3}{4}}}$

3. Derivada da soma ou diferença entre duas ou mais funções: $f(x) = u \pm v \implies$ $f'(x) = u' \pm v'$

- $f(x) = 5x^4 - 3x^3 + 2x^2 - x \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = 20x^3 - 9x^2 - 1$

4. Derivada da função composta, $g(x) = a \cdot f^n \quad \Longrightarrow \quad g'(x) = a \cdot n \cdot f^{n-1} \cdot f'(x)$

- $g(x) = 2(x^3 - 3x^2 + 5x)^4 \quad \Longrightarrow \quad g'(x) = 2 \cdot 4 \cdot (x^3 - 3x^2 + 5x)^3(3^2 + 6x + 8)$

$$\therefore \quad g'(x) = 8(3^2 + 6x + 8)(x^3 - 3x^2 + 5x)^3$$

5. Derivada do produto de duas ou mais funções: $f(x) = u \cdot v \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = u' \cdot v + u \cdot v'$

- $f(x) = (3x^2 - 5x) \cdot (x^3 + 2x) \quad \Longrightarrow$

  $f'(x) = (6x - 5) \cdot (x^3 + 2x) + (3x^2 - 5x) \cdot (2x^2 + 2)$

  (Podemos efetuar ou não o produto entre os polinômios.)

6. Derivada da divisão entre duas ou mais funções: $f(x) = \frac{u}{v} \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = \frac{u' \cdot v - u \cdot v\prime}{v^2}$

- $f(x) = \frac{3x^2 - 5x}{x^3 + 2x} \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = \frac{(6x-5)(x^3+2x) - (3x^2-5x)(3x^2+2)}{(x^3+2x)^2}$

  (Podemos efetuar ou não o produto e buscar simplificação algébrica.)

7. Derivada da função exponencial de base *e*: $f(x) = e^u \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = u' \cdot e^u$

- $f(x) = e^{4x^2 - 3x} \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = (8x - 3) \cdot e^{4x^2 - 3x}$

8. Derivada da função exponencial: $f(x) = a^u \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = u' \cdot a^u \cdot \ln a$ com $a > 0, a \neq 1, a \neq \boldsymbol{e}$

- $f(x) = 5^{-2x^3 + 3x} \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = (-6x^2 + 3) \cdot 5^{-2x^3 + 3x} \cdot \ln 5$

9. Derivada do logaritmo neperiano: $\ln|u| \implies f'(x) = \frac{u'}{u}$

- $f(x) = \ln(2x^3 + 6x^2 - 3x + 7) \implies f'(x) = \frac{6x^2+12x-3}{2x^3+6x^2-3x+7}$

10. Derivada do logaritmo de base $a$: $\log_a|u| \implies f'(x) = \frac{u' \cdot \log_a e}{u}$ ou $f'(x) = \frac{u'}{u \cdot \ln a}$

11. Derivada da função exponencial composta: $f(x) = u^v$

$\implies f'(x) = u' \cdot v \cdot u^{v-1} + v' \cdot u^v \cdot \ln u$

- $f(x) = (x^2 + 3x)^{(2x-1)}$

$\implies f'(x) = (2x+3)(2x-1)(x^2+3x)^{(2x-2)} + (2) \cdot (x^2+3x)^{(2x-1)} \cdot \ln(x^2+3x)$

É interessante observar que todas as regras de derivação são obtidas a partir da aplicação da definição de derivada na função em questão, ou seja, aplicamos a regra dos 4 passos na função e assim obtemos sua derivada.

A seguir, apresentamos uma tabela resumida das derivadas e suas funções mais usadas. É interessante conhecer a tabela para maior facilidade na resolução dos problemas propostos.

| Função | Derivada |
|---|---|
| 1. $f(x) = k$ | $f'(x) = 0$ |
| 2. $f(x) = kx^n$ | $f'(x) = k \cdot n \cdot x^{n-1}$ |
| 3. $f(x) = u \pm v$ | $f'(x) = u' \pm v'$ |
| 4. $g(x) = a \cdot f^n$ | $g'(x) = a \cdot n \cdot f^{n-1} \cdot f'$ |
| 5. $f(x) = u \cdot v$ | $f'(x) = u' \cdot v + u \cdot v'$ |
| 6. $f(x) = \frac{u}{v}$ | $f'(x) = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$ |
| 7. $f(x) = e^u$ $(e = nº\ Euler)$ | $f'(x) = u' \cdot e^u$ |
| 8. $f(x) = a^u$ $(a > 0\ e\ a \neq 1)$ | $f'(x) = u' \cdot a^u \cdot \ln a$ |

| | |
|---|---|
| 9. $f(x) = ln\,\lvert u \rvert$ | $f'(x) = \frac{u'}{u}$ |
| 10. $f(x) = \ log_a\,\lvert u \rvert$ | $f'(x) = \frac{u' \cdot \log_a e}{u}$ ou $f'(x) = \frac{u'}{u \cdot \ln a}$ |
| 11. $f(x) = u^v$ | $f'(x) = u' \cdot v \cdot u^{v-1} \cdot +v' \cdot u^v \cdot \ln u$ |
| 12. $f(x) = senu$ | $f'(x) = u' \cdot cosu$ |
| 13. $f(x) = cosu$ | $f'^{(x)} = -u' \cdot senu$ |
| 14. $f(x) = tgu$ | $f'(x) = u' \cdot sec^2 u$ |
| 15. $f(x) = cotgu$ | $f'(x) = u' \cdot cosec^2 u$ |
| 16. $f(x) = secu$ | $f'(x) = u' \cdot secu \cdot tgu$ |
| 17. $f(x) = cosecu$ | $f'(x) = u' \cdot cosecu \cdot cotgu$ |

**Solução:**

### Para saber mais: Biblioteca Pearson


FERNANDES, D. B. (Org.). **Cálculo diferencial.** São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2014. p. 67. Disponível em: https://plataforma.bvirtual.com.br/Acervo/Publicacao/22092. Acesso em: 02 jul. 2021.

FLEMMING, D. M. **Cálculo A:** funções, limite, derivação, integração. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2006. p. 133. Disponível em: https://plataforma.bvirtual.com.br/Acervo/Publicacao/748. Acesso em: 05 jul. 2021.

THOMAS, G. B. et al. **Cálculo, volume 1.** 12ª ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2012. p. 129. Disponível em: https://plataforma.bvirtual.com.br/Acervo/Publicacao/3376. Acesso em: 02 jul. 2021.


### SIBI – UNITAU


Spiegel: Manual de Tabelas e Fórmulas Matemáticas

https://integrada.minhabiblioteca.com.br/books/9788540700567

### 2.2.1 A Regra da cadeia

Antes de explicarmos a regra da cadeia, é importante conhecer outra forma de indicarmos a derivada de uma função, usando a notação de Leibniz . Seja e $y = f(x)$, podemos indicar a derivada de $y$ como: $f'(x) = \frac{dy}{dx}$ .

Desse modo, considerando duas funções deriváveis $f$ e $g$ , onde $y = g(u)$ e $u = f(x)$, temos que, para todo $x$ tal que $f(x)$ pertença ao domínio de $g$, podemos escrever que $y = g(u) = g[f(x)]$, ou seja, podemos considerar a função composta $(g \circ f)(x)$.

De modo prático, sendo $y = (x^2 - 5x + 8)^6$, podemos entender $y$ como a composição das funções $y = g(u) = u^6$ e $u = f(x) = x^2 - 5x + 8$. Desse modo, a regra da cadeia nos dará a derivada da função composta $g \circ f$, em termos das derivadas de $f$ e $g$. Para facilitar a compreensão, vamos definir a regra da cadeia usando a notação de Leibniz:

Se $y = g(u)$ e $u = f(x)$ e as derivadas $\frac{dy}{du}$ e $\frac{du}{dx}$ existem, então a função composta que $y = g[f(x)]$ terá derivada dada por:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \quad \text{ou} \quad y'(x) = g'(u) \cdot f'(x)$$

**Para saber mais: Biblioteca Pearson**

FLEMMING, D. M.; GONÇALVES, M. B. **Cálculo A:** funções, limite, derivação, integração. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2006. p. 139. Disponível em: https://plataforma.bvirtual.com.br/Acervo/Publicacao/748. Acesso em: 02 jul. 2021.

Na prática: sendo $y = (x^2 - 5x + 8)^6$ , determinar sua derivada, ou seja, encontrar $y'$, ou ainda, determinar $\frac{dy}{dx}$.

**Solução:** Sendo: $u = x^2 - 5x + 8 \implies y = y(u)$ e $u = u(x)$ $\therefore$ $y' = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$

Sendo: $u = x^2 - 5x + 8 \implies \frac{du}{dx} = u' = 2x - 5$. Como: $y = u^6 \implies \frac{dy}{du} = y' = 6u^5$

então, temos que: $y' = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 6u^5 \cdot (2x - 5) \implies y' = 6(x^2 - 5x + 8)^5 \cdot (2x - 5)$

(regra 4)

$$\therefore \quad \boxed{y' = 6(2x - 5)(x^2 - 5x + 8)^5}$$

**Solução:**

## 2.3 Regras de derivação para produto e quociente de funções

Derivada do produto entre funções: sejam as funções $f = f(x)$ e $g = g(x)$ com $h = h(x)$, definida por $h(x) = f(x) \cdot g(x)$. Se existirem $f'(x)$ e $g'(x)$, então:

$$h'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \qquad \text{(regra 5)}$$

**Para saber mais: Biblioteca Pearson**

FLEMMING, D. M.; GONÇALVES, M. B. **Cálculo A:** funções, limite, derivação, integração. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2006. p. 135. Disponível em: https://plataforma.bvirtual.com.br/Acervo/Publicacao/748. Acesso em: 02 jul. 2021.

Veja um exemplo de aplicação da fórmula: seja $f(x) = (2x^4 - 3x) \cdot (x^3 + x^2)$, determinar sua derivada, ou seja, encontrar $f'(x)$, ou ainda, determinar $\frac{dy}{dx}$.

**Solução:**

$u = (2x^4 - 3x)$ | $v = x^3 + x^2$ | usando regra 5: $f(x) = u \cdot v$

$\Longrightarrow \; f'(x) = u' \cdot v + u \cdot v'$

$u' = 8x^3 - 3$ | $v' = 3x^2 + 2x$ | temos que:

$$f'(x) = (8x^3 - 3)(x^3 + x^2) + (2x^4 - 3x)(3x^2 + 2x)$$

$$\therefore f'(x) = (8x^3 - 3)(x^3 + x^2) + (2x^4 - 3x)(3x^2 + 2x)$$

(Podemos efetuar ou não o produto entre os polinômios.)

**Solução:**

Derivada do quociente entre funções: sejam as funções $f = f(x)$ e $g = g(x)$ com $h = h(x)$, definida por $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$. Se existirem $f'(x)$ e $g'(x)$, então:

$$h'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2} \qquad \text{(regra 6)}$$

**Para saber mais: Biblioteca Pearson**

FLEMMING, D. M.; GONÇALVES, M. B. Cálculo A: funções, limite, derivação, integração. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2006. p. 136. Disponível em: https://plataforma.bvirtual.com.br/Acervo/Publicacao/748. Acesso em: 02 jul. 2021.

Veja uma aplicação da regra: encontrar $f'(x)$, ou ainda, determinar $\frac{dy}{dx}$, dado que $f(x) = \frac{3x^4 - 5x}{x^2 - 4x + 2}$.

**Solução:**

| | | |
|---|---|---|
| $u = 3x^4 - 5x$ | $v = x^2 - 4x + 2$ | usando regra 6: $\Longrightarrow f(x) = \frac{u}{v} \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = \frac{u' \cdot v - u \cdot v\prime}{v^2}$ |
| $u' = 12x^3 - 5$ | $v' = 2x - 4$ | temos que: $f'(x) = \frac{(12x^3-5)(x^2-4x+2)-(3x^4-5x)\cdot(2x-4)}{(x^2-4x+2)^2}$ |

$$\therefore\ f'(x) = \frac{(12x^3-5)(x^2-4x+2)-(3x^4-5x)\cdot(2x-4)}{(x^2-4x+2)^2}$$

(Podemos efetuar ou não o produto e buscar simplificação algébrica.)

**Solução:**

Note que, para facilitar a escrita, é comum chamarmos as funções dadas de $u$ , $v$ , $h$, $t$ sem escrevermos o parênteses e a variável $x$. Desse modo, a notação fica mais leve e o trabalho torna-se mais prático.

**Para saber mais: SIBI – Unitau**

Ayres: https://integrada.minhabiblioteca.com.br/books/9788565837446

Hoffmann: https://integrada.minhabiblioteca.com.br/books/978-85-216-2909-2

Ávila: https://integrada.minhabiblioteca.com.br/books/978-85-216-2128-7

Stewart: https://integrada.minhabiblioteca.com.br/books/9788522126859

Anton: https://integrada.minhabiblioteca.com.br/books/9788582602263

**Biblioteca Pearson**

BASSANEZI, R. C. **Introdução ao cálculo e aplicações.** São Paulo: Contexto, 2015. Disponível em: https://plataforma.bvirtual.com.br/Acervo/Publicacao/31203. Acesso em: 02 jul. 2021.

CASTANHEIRA, N. P.; LEITE, A. E. **Tópicos de Cálculo I:** limites, derivadas e integrais. Curitiba: InterSaberes, 2017. Disponível em: https://plataforma.bvirtual.com.br/Acervo/Publicacao/49388. Acesso em: 02 jul. 2021.

FACCIN, G. M. **Elementos de cálculo diferencial e integral.** Curitiba: InterSaberes, 2015. Disponível em: https://plataforma.bvirtual.com.br/Acervo/Publicacao/30379. Acesso em: 02 jul. 2021.

FERNANDES, D. B. (Org.). **Cálculo diferencial.** São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2014. Disponível em: https://plataforma.bvirtual.com.br/Acervo/Publicacao/22092. Acesso em: 02 jul. 2021.

FLEMMING, D. M.; GONÇALVES, M. B. Cálculo A: funções, limite, derivação, integração. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2006. Disponível em: **https://plataforma.bvirtual.com.br/Acervo/Publicacao/748**. Acesso em: 02 jul. 2021.

LARRY, G. Cálculo em quadrinhos. São Paulo: Blucher, 2014. Disponível em: https://plataforma.bvirtual.com.br/Acervo/Publicacao/164654. Acesso em: 02 jul. 2021.

THOMAS, G. B. et al. **Cálculo, volume 1.** 12ª ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2012. Disponível em: https://plataforma.bvirtual.com.br/Acervo/Publicacao/3376. Acesso em: 02 jul. 2021.

**Vídeos:**

Khan Academy: https://pt.khanacademy.org/math/calculus-home

Para entender e saber fazer uso dos conceitos estudados em Cálculo Diferencial e Integral 1, siga os passos e seja feliz:

1. Procure entender a teoria desenvolvida, se familiarize com as notações usadas e perceba o desenvolvimento da memória de cálculo necessária para a resolução dos exercícios. Esses são itens fundamentais para a apreensão dos conteúdos estudados.
2. Lembre-se dos conceitos estudados em Pré-Cálculo. Eles são a base para a resolução dos problemas propostos.
3. Tenha ordem na resolução dos exercícios propostos, concatene de forma adequada a lógica necessária e use adequadamente as notações pertinentes ao Cálculo.
4. Faça exercícios, resolva vários exercícios, resolva muitos exercícios... Somente assim você desenvolverá habilidades algébricas e aprimorará a lógica necessária para resolvê-los com relativa facilidade.
5. Leia os livros relacionados no e-book que foram listados e encontre aquele que melhor se adapta a você. Minha sugestão recai sobre Stewart, Tomas, Anton, Flemming e Ayres, sem demérito aos demais relacionados.
6. Assista às videoaulas produzidas para o curso.
7. Participe do "Plantão de Dúvidas" que ocorre todo sábado às 14h30.

## 2.4 Síntese da Unidade

Nesta Unidade estudamos o conceito de derivada de uma função. Vimos como derivar uma função usando a definição ou regra dos 4 passos, como derivar funções usando a tabela de derivadas e discutirmos os conceitos algébrico e geométrico da derivada. Dentre as regras de derivação, vimos que três delas são muito importantes: a derivada da função composta, onde devemos empregar a regra da cadeia, além das derivadas do produto e do quociente de funções que possuem procedimento específico. Como recomendação final, reitero a necessidade da resolução de exercícios, pois somente desse modo você terá sucesso em Cálculo.

## 2.5 Para Saber Mais Biblioteca Pearson/Sibi Unitau

BASSANEZI, R. C. **Introdução ao cálculo e aplicações.** São Paulo: Contexto, 2015. Disponível em: https://plataforma.bvirtual.com.br/Acervo/Publicacao/31203. Acesso em: 02 jul. 2021.

CASTANHEIRA, N. P.; LEITE, A. E. Tópicos de Cálculo I: limites, derivadas e integrais. Curitiba: InterSaberes, 2017. Disponível em: https://plataforma.bvirtual.com.br/Acervo/Publicacao/49388. Acesso em: 02 jul. 2021.

FACCIN, G. M. **Elementos de cálculo diferencial e integral.** Curitiba: InterSaberes, 2015. Disponível em: https://plataforma.bvirtual.com.br/Acervo/Publicacao/30379. Acesso em: 02 jul. 2021.

FERNANDES, D. B. (Org.). **Cálculo diferencial.** São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2014. Disponível em: https://plataforma.bvirtual.com.br/Acervo/Publicacao/22092. Acesso em: 02 jul. 2021.

FLEMMING, D. M.; GONÇALVES, M. B. **Cálculo A:** funções, limite, derivação, integração. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2006. Disponível em: https://plataforma.bvirtual.com.br/Acervo/Publicacao/748. Acesso em: 02 jul. 2021.

LARRY, G. **Cálculo em quadrinhos.** São Paulo: Blucher, 2014. Disponível em: https://plataforma.bvirtual.com.br/Acervo/Publicacao/164654. Acesso em: 02 jul. 2021.

THOMAS, G. B. et al. **Cálculo, volume 1.** 12ª ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2012. Disponível em: https://plataforma.bvirtual.com.br/Acervo/Publicacao/3376. Acesso em: 02 jul. 2021.

Cálculo: Um curso moderno e suas aplicações
https://integrada.minhabiblioteca.com.br/books/978-85-216-2909-2

Frank Ayres: Cálculo: https://integrada.minhabiblioteca.com.br/books/9788565837446

James Stewart: https://integrada.minhabiblioteca.com.br/books/9788522126859

### Aplicativos Gráficos

Geogebra: https://www.geogebra.org

Graphmatica: http://www.graphmatica.com/

Microsoft Mathematics: https://microsoft-mathematics.br.uptodown.com/windows

### Vídeo Khan Academy

**Limites e Continuidade de Função:**

**https://pt.khanacademy.org/math/calculus-home**

## 2.6 Atividade Aprendendo

**1.** Usando a definição, ou regra dos 4 passos, determinar a derivada da função $f(x) = 4 - x^2$ e, em seguida, $f'(-3)$.

**Solução:**

**2**. O número de galões de água em um tanque $t$ minutos depois de iniciar seu esvaziamento é dado por $Q(t) = 200(30-t)^2$. Determinar:

a) A taxa de variação instantânea de esvaziamento do tanque quando $t = 10$ minutos.

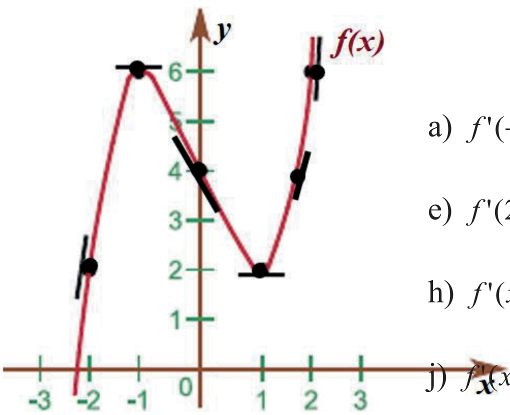
b) A taxa de variação média de esvaziamento do tanque durante os primeiros 10 minutos. Observação: 1 galão tem 3,79 litros.

**Solução:**

**3.** Determinar a equação da reta tangente e da reta normal à curva $f(x) = -2x^2 + 5x$ no ponto de abscissa 3, representando graficamente a situação.

**Solução:**

**4.** Dado o gráfico abaixo, avalie o valor das derivadas nos pontos especificados:




a) $f'(-2)$ b) $f'(-1)$ c) $f'(0)$ d) $f'(1)$

e) $f'(2)$ f) $f'(3)$ g) $f'(x)\ \forall \in R \mid -2 < x < -1$

h) $f'(x)\ \forall \in R \mid -1 < x < 1$ i) $f'(x)\ \forall \in R \mid x > 1$

j) $f'(x)\ \forall \in R \mid x < -1$ l) $f'(x)\ \forall \in R \mid x > -1$

**Solução:**

**5.** Determine a equação da reta tangente e da reta normal à curva $y = e^{1-x^2}$ no pontos $P_1 = (-1;1)$ e esboce o gráfico da situação.

**Solução:**

**6.** Quais as coordenadas do ponto pertencente à curva $f(x) = x^2 - 3x - 4$ , em que a reta tangente é paralela ao eixo $Ox$ ?

**Solução:**

**7.** Calcule a derivada de cada uma das funções abaixo usando as regras operatórias:

a) $f(x) = 8$

b) $g(x) = x^2 + x - 5$

c) $y = \dfrac{4x^3}{3} - 4$

d) $y = e^{3x^2+2x-1}$

e) $f(t) = \ln(5t^3 - 3t^5)$

f) $f(x) = \cos(2x^2 + x)$

g) $y = sen(5x^2 + 3)$

h) $y = 2 \cdot (5x^3 + 4x)^4$

i) $y(x) = \dfrac{2x+5}{3x-2}$

j) $v(t) = (1-t) \cdot (1+t^2)^{-1}$

l) $y = 3\sqrt[4]{x}$

m) $y = 7x^{-k}$

n) $g(x) = sen(wx + \varphi - \beta\alpha)$

o) $y = \sqrt{1 - \cos 2x}$

p) $y = x.sen4x + e^{x^2} + 3x^6 - \dfrac{1}{x} + 18x - 7 + \ln 2x$

**Solução:**

8. A posição de uma partícula é dada por $s(t)=2t^3-7t^2+4t+1$, $t\geq 0$, (SI). Pede-se para determinar:

a) As funções $v(t)$ e $a(t)$ que representam, respectivamente, velocidade e aceleração.

b) A aceleração depois de $1\,s$.

c) A aceleração no instante em que a velocidade é zero.

**Solução:**

## 2.7 Praticando

**1.** Encontre a equação das retas tangente e normal à curva $f(x)=-x^2+6x-4$ no ponto $P$ de ordenada 4. Faça o esboço do gráfico da situação.

**2.** Qual a curva $y(x)$ que atende às condições: $y'(x)=15x^2-6x+2$ e $y(1)=5$.

**3.** Qual deve ser o valor de $x$ para que a derivada de $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ valha $-2$?

**4.** Calcule a derivada de cada uma das funções a seguir usando as regras operatórias:

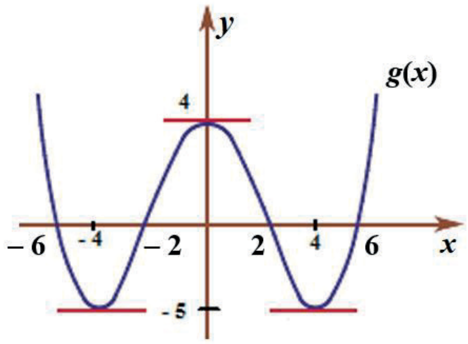
a) $y=\left(\dfrac{3x+2}{2x+1}\right)^5$ b) $y=e^{2x}.\cos 3x$ c) $y=(x-\sqrt{x})^4$ d) $y=x^3\cdot e^{-2x^2-5x+1}$

e) $y = e^{1-x^3}$ f) $y = e^{-2x} \cdot 3sen2x$ g) $y = \sec\sqrt{x-1}$ h) $f(x) = \sqrt[3]{(2x^2-3)^2}$

**5.** Dado que $f(x) = x^3 + 2x + 10$, verifique se a reta tangente a curva no ponto $x = 3$ é crescente ou decrescente.

**6.** A função $s(t) = -16t^2 + 3t + 385$ dá a altura em que se encontra uma pedra no instante *t* quando esta cai sobre o solo. Em que instante *t* a pedra tocará o solo? Qual será a velocidade da pedra quando tocar o solo?

**7.** Dado o gráfico abaixo, determine ou avalie o possível valor do que se pede:




a) $g'(-4)$ b) $g'(0)$ c) $g'(4)$ d) $g'(1)$

e) $g'(2)$ f) $g'(3)$ g) $g'(x)\ \forall \in R \mid -4 < x < 0$

h) $g'(x)\ \forall \in R \mid 0 < x < 4$ i) $g'(x)\ \forall \in R \mid x > 4$

j) $g'(x)\ \forall \in R \mid x < -4$ l) $g'(-2)$

m) $g'(-6)$ n) $g'(6)$

**Solução:**

# Unidade III
# Derivadas II
# Aplicações das Derivadas

Nesta Unidade, estudaremos a derivação implícita, aplicada especificamente quando não conseguimos, em uma função, explicitar uma variável em função de outra. Veremos o que seja derivação sucessiva ou derivação superior de uma função e, aplicando a Regra de L'Hôpital, resolveremos problemas de limites usando derivadas, o que facilita o processo sobremaneira. Estudaremos, nas aplicações das derivadas, o que comumente se chama de problemas de otimização, ou máximos e mínimos de funções, nos permitindo analisar uma função qualquer sobre eventuais valores máximos, mínimos ou de inflexão, ponto no qual uma função muda sua concavidade. Tal estudo é relevante no esboço de gráficos de funções desconhecidas, além de permitir, a partir do modelamento matemático de um problema real, a tomada de decisão sobre questões que envolvam, por exemplo, lucro máximo ou custo mínimo.

Fonte: Freepik

## 3.1 Derivação Implicita e Derivação Superior

Chamamos de **derivação superior** as sucessivas derivadas de uma mesma função, ou seja, a segunda derivada de uma função $f(x)$, indicada por $f''(x)$, lê-se "*f duas linhas de x*", e significa derivar a função $f(x)$ duas vezes sucessivamente. De modo semelhante, determinar $f'''$ significa calcular a terceira derivada da função $f(x)$. assim, para obtê-la, devemos derivar a função $f(x)$ três vezes sucessivamente.

Veja só: Se $f(x) = -4x^5 + 3x^3 - 2x + 1$, determinar $f'''(x)$.

**Solução:**

Sendo $f(x) = -4x^5 + 3x^3 - 2x + 1 \implies f'(x) = -20x^4 + 9x^2 - 2 \implies f''(x) = -80x^3 + 18x$

$$\therefore f'''(x) = -240x^2 + 18$$

Notação de Gottfried Wilhelm **Leibniz**: a notação $\frac{d}{dx}$ foi implementada por Leibniz no séc. XVIII, sendo equivalente à notação "linha", com a vantagem de indicar com clareza em relação a qual variável a função será derivada, além de facilitar a percepção de quantas vezes devemos derivar a mesma função em relação a uma dada variável.

A notação $\frac{d^n f}{dx^n}$ indica que a função *f* será derivada "*n*" vezes em relação à variável *x*, nas "*n*" vezes.

Veja um exemplo: dado que $f(x) = -4x^5 + 3x^3 - 2x + 1$, calcular $\frac{d^3 f}{dx^3}$.

**Solução:**

Sendo $f(x) = -4x^5 + 3x^3 - 2x + 1 \implies \frac{df}{dx} = \frac{d(-4x^5 + 3x^3 - 2x + 1)}{dx} = -20x^4 + 9x^2 - 2$

$$\therefore \quad \frac{d^2(-20x^4 + 9x^2 - 2)}{dx^2} = -80^3 + 18x \qquad \therefore \quad \frac{d^3(-80^3 + 18x)}{dx^3} = -240x^2 + 18$$

Mais um exemplo: dado que $f(x) = e^x x^n$ , determine $\frac{d^3 f}{dx^3}$ .

**Solução:**

Fazendo: $f(x) = u \cdot v$ para usarmos a regra da derivada do produto de duas funções, e usando a notação "linha" para descarregar a escrita:

$$f'(x) = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$\implies \quad f''(x) = u'' \cdot v + u' \cdot v' + u' \cdot v' + u \cdot v'' \quad \therefore \; f''(x) = u'' \cdot v + 2u' \cdot v' + u \cdot v''$$

$$\implies \; f'''(x) = u''' \cdot v + u'' \cdot v' + 2 \cdot u'' \cdot v' + 2 \cdot u' \cdot v'' + u' \cdot v'' + u \cdot v'''$$

$$\therefore \; f'''(x) = u''' \cdot v + 3 \cdot u'' \cdot v' + 3 \cdot u' \cdot v'' + u \cdot v''' \quad \text{ou}$$

$$\frac{d^3 f}{dx^3} = \frac{d^3 u}{dx^3} \cdot v + 3 \cdot \frac{d^2 u}{dx^3} \cdot \frac{dv}{dx} + 3 \cdot \frac{du}{dx} \cdot \frac{d^2 v}{dx^2} + u \cdot \frac{d^3 v}{dx^3}$$

**(I)** Determinando as derivadas de $u = e^x$ e $v = x^n$, temos:

$$u = e^x \qquad v = x^n$$

$$\frac{du}{dx} = e^x \qquad \frac{dv}{dx} = n \cdot x^{n-1}$$

$$\frac{d^2u}{dx^2} = e^x \qquad \frac{d^2v}{dx^2} = n \cdot (n-1)x^{n-2}$$

$$\frac{d^3u}{dx^3} = e^x \qquad \frac{d^3v}{dx^3} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2)x^{n-3}$$

Assim, substituindo em **(I)**, temos que:

$$\frac{d^3f}{dx^3} = e^x \cdot x^n + 3e^x n x^{n-1} + 3e^x\, n(n-1)x^{n-2} + e^x n(n-1)(n-2)x^{n-3}$$

**Solução:**

Faça você: obter $\frac{d^nf}{dx^n}$, dado que: $f(x) = e^{ax}$

**Solução:**

Denominamos derivação implícita o processo usado quando, ao tentarmos derivar uma função, não conseguimos isolar uma das variáveis no primeiro membro, como pode ser percebido na equação $x^3 - xy + y^3 = 1$. Note que, no caso, não é possível isolar a variável $y$ no primeiro membro da equação, isto é, não conseguimos colocar a equação na forma $y = f(x)$. Desse modo, para determinar $\frac{dy}{dx}$, usaremos derivação implícita.
É importante notar que a derivação implícita requer quatro passos, a saber:

**1.** Derive ambos os membros da equação em relação à variável $x$, considerando $y$ como uma função derivável em $x$, portanto, ao derivar $y$, faremos uso da fórmula 4 da nossa tabela.

**2.** Agrupe os termos que contêm $y'$ ou $\frac{dy}{dx}$ no primeiro membro, e os demais, no segundo membro da equação.

**3.** Isole, usando fatoração, $y'$ ou $\frac{dy}{dx}$ no primeiro membro da equação, passando os demais para o segundo membro.

**4.** Encontre $y'$ ou $\frac{dy}{dx}$.

Voltando à equação dada inicialmente e encontrando sua derivada.

Dado que $x^3 - xy + y^3 = 1$, determinar $\frac{dy}{dx}$.

**Solução:**

$x^3 - xy + y^3 = 1$ derivando cada um dos termos em relação à variável $x$, vem:

$$3x^2 - \left(1 \cdot y + x \cdot \frac{dy}{dx}\right) + 3 \cdot y^2 \cdot \frac{dy}{dx} = 0 \Longrightarrow 3x^2 - y - x \cdot \frac{dy}{dx} + 3 \cdot y^2 \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\Longrightarrow -x \cdot \frac{dy}{dx} + 3 \cdot y^2 \cdot \frac{dy}{dx} = y - 3x^2 \quad \Longrightarrow \frac{dy}{dx}(-x + 3y^2) = y - 3x^2$$

$$\therefore \boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{y - 3x^2}{3y^2 - x}}$$

**Solução:**

Vamos a mais um exemplo: dado que $3x^2y^3 + 5xy = -3y + 2$, encontre $\frac{dy}{dx}$.

**Solução:**

$3x^2y^3 + 5xy = -3y + 2$, derivando cada um dos termos em relação à variável $x$, vem:

$$6xy^3 + 3x^2 3y^2 \frac{dy}{dx} + 5y + 5x\frac{dy}{dx} = -3\frac{dy}{dx} + 0 \implies \frac{dy}{dx}(9x^2y^2 + 5x + 3) = -6xy^3 - 5y$$

$$\therefore \boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{-6xy^3 - 5y}{9x^2y^2 + 5x + 3}}$$

**Solução:**

**Para saber mais: Biblioteca Pearson**

**Derivação Implícita e Superior**

FERNANDES, D. B. (Org.). **Cálculo diferencial.** São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2014. p. 76. Disponível em: https://plataforma.bvirtual.com.br/Acervo/Publicacao/22092. Acesso em: 02 jul. 2021.

FLEMMING, D. M.; GONÇALVES, M. B. **Cálculo A:** funções, limite, derivação, integração. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2006. p. 163 e 165. Disponível em: https://plataforma.bvirtual.com.br/Acervo/Publicacao/748. Acesso em: 02 jul. 2021.

THOMAS, G. B. et al. **Cálculo.** v.1, 12. ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2012. pp. 164 e 166. Disponível em: https://plataforma.bvirtual.com.br/Acervo/Publicacao/3376. Acesso em: 02 jul. 2021.

## 3.2 Regra de L'Hôpital

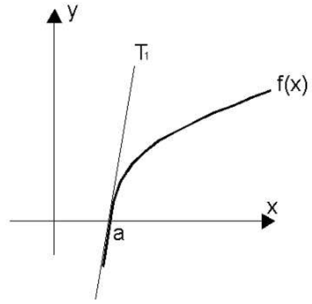
O cálculo de limites que gera indeterminações do tipo $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$ ou $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\infty}{\infty}$, realizado na Unidade I, pode ficar muito mais simples utilizando-se o **Teorema de L´Hôpital**, de Guilluane François Antoine, Marquês de L'Hôpital (1661-1707), que nos diz: se $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)}$ é da forma $\dfrac{0}{0}$ ou $\dfrac{\infty}{\infty}$, então $f$ e $g$ podem ser substituídas por suas respectivas derivadas, para o cálculo do limite. Obs.: para os casos em que $f$ ou $g$ são do tipo $\sqrt{f(x)}$ com $x \to \infty$, tomar o termo de maior valor dentro do radical.

Veja a demonstração do Teorema de L'Hôpital:

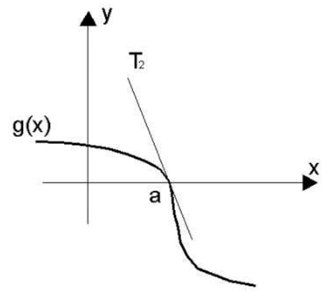
Se $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ onde $f(a) = 0$ e $g(a) = 0$ então, $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{0}{0}$ será indeterminado.

Graficamente, temos:

se $f(a) = 0$




se $g(a) = 0$




Temos que: $T_1$ = tangente à curva $f$ em $x = a$ $T_2$ = tangente à curva $g$ em $x = a$

Determinando a equação das retas tangentes $T_1$ e $T_2$, usando fórmula $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$.

Em $T_1$: $(a, f(a))$ $\Longrightarrow$ $y - f(a) = f'(a)(x - a)$, como $f(a) = 0$, temos que:

$y - 0 = f'(a)(x - a)$ $\therefore$ $y = f'(a)(x - a)$ **( I )**

Em $T_2$: $(a, g(a))$ $\Longrightarrow$ $y - g(a) = g'(a)(x - a)$, como $g(a) = 0$, temos que:

$y - 0 = g'(a)(x - a)$ $\therefore$ $y = g'(a)(x - a)$ **( II )**

Substituindo **( I )** e **( II )** em $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$, teremos: $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(a)\cancel{(x-a)}}{g'(a)\cancel{(x-a)}} = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(a)}{g'(a)}$

Isto é: $f(x)$ e $g(x)$ são trocadas por suas derivadas quando $f(x)$ e $g(x)$ tendem a zero para o cálculo do limite.

Aplicação prática: calcular $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^2 - 4}{x + 2}$.

**Solução:**

$\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^2 - 4}{x + 2} = \dfrac{0}{0} = ?$ (indeterminação).

Aplicando L'Hôpital, temos: $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^2 - 4}{x + 2} = \lim\limits_{x \to -2} \dfrac{2x}{1} = \dfrac{2(-2)}{1} = -4$

$$\therefore \boxed{\lim_{x \to -2} \frac{x^2 - 4}{x + 2} = -4}$$

Mais um exemplo: determinar $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3 + 1}{x.\operatorname{sen}(x+1)}$.

**Solução:**

$\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3 + 1}{x.\operatorname{sen}(x+1)} = \dfrac{(-1)^3 + 1}{(-1)sen(-1+1)} = \dfrac{-1+1}{(-1)sen(0)} = \dfrac{0}{0} = ?$ (indeterminação). Aplicando L'Hôpital, temos:

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^3 + 1}{x \cdot \operatorname{sen}(x+1)} = \lim_{x \to -1} \frac{3x^2}{1 \cdot \operatorname{sen}(x+1) + x \cdot \cos(x+1)} = \frac{3(-1)^2}{1 \cdot \operatorname{sen}(-1+1) + (-1) \cdot \cos(-1+1)}$$

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^3 + 1}{x.\operatorname{sen}(x+1)} = \frac{3}{-1} \quad \therefore \quad \boxed{\lim_{x \to -1} \frac{x^3 + 1}{x.\operatorname{sen}(x+1)} = -3}$$

**Solução:**

### Para saber mais: Biblioteca Pearson

**Derivação Implícita e Superior**

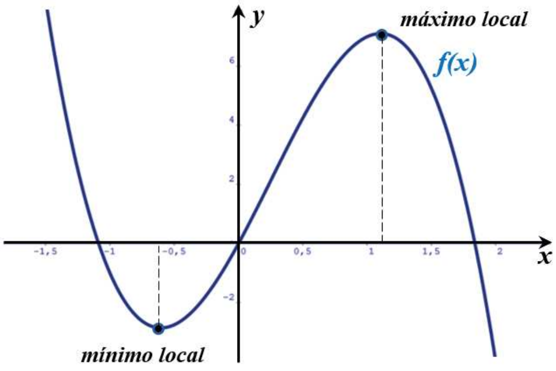
BASSANEZI, R. C. **Introdução ao cálculo e aplicações.** São Paulo: Contexto, 2015. p. 231. Disponível em: https://plataforma.bvirtual.com.br/Acervo/Publicacao/31203. Acesso em: 02 jul. 2021.

FLEMMING, D. M.; GONÇALVES, M. B. **Cálculo A:** funções, limite, derivação, integração. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2006. p. 226. Disponível em: https://plataforma.bvirtual.com.br/Acervo/Publicacao/748. Acesso em: 02 jul. 2021.

THOMAS, G. B. et al. **Cálculo.** v.1. 12. ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2012. p. 243. Disponível em: https://plataforma.bvirtual.com.br/Acervo/Publicacao/3376. Acesso em: 02 jul. 2021.

## 3.3 Máximos e Mínimos de Funções

Considere uma função *f* definida em um intervalo aberto ]a , b[ . Diremos que a função *f* admitirá um valor máximo local em um ponto $x_0 \in ]a, b[$ se existir um valor α $> 0$ de tal modo que $f(x) \leq f(x_0)$ para qualquer $x$ tal que $x_0 - \alpha < x < x_0 + \alpha$. Analogamente, diremos que a função *f* admitirá um valor mínimo local em um ponto $x_0 \in ]a, b[$, se existir um valor α $> 0$ de tal modo que $f(x) \geq f(x_0)$ para qualquer $x$ tal que $x_0 - \alpha < x < x_0 + \alpha$. É interessante notar que $]x_0 - \alpha\,;\, x_0 + \alpha[ \subseteq ]a\,; b[$.



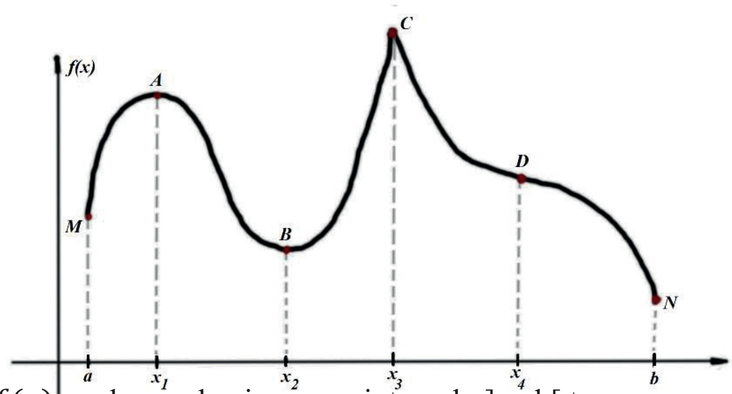

Máximos e mínimos locais em uma $f(x)$.

Diremos também que a função $f$ admitirá um valor máximo absoluto ou global se para algum valor $x_0 \in [a\,, b]$ tivermos $f(x) \leq f(x_0)$ para todo $x \in [a; b]$, ou seja, o valor de $f(x_0)$ é maior ou igual a todos os outros valores de $f(x)$ para qualquer $x$ $[a; b]$. De modo análogo, a função $f$ admitirá um valor de mínimo absoluto ou global se para algum valor $x_0 \in [a\,, b]$ tivermos $f(x) \geq f(x_0)$ para todo $x$ $[a; b]$.

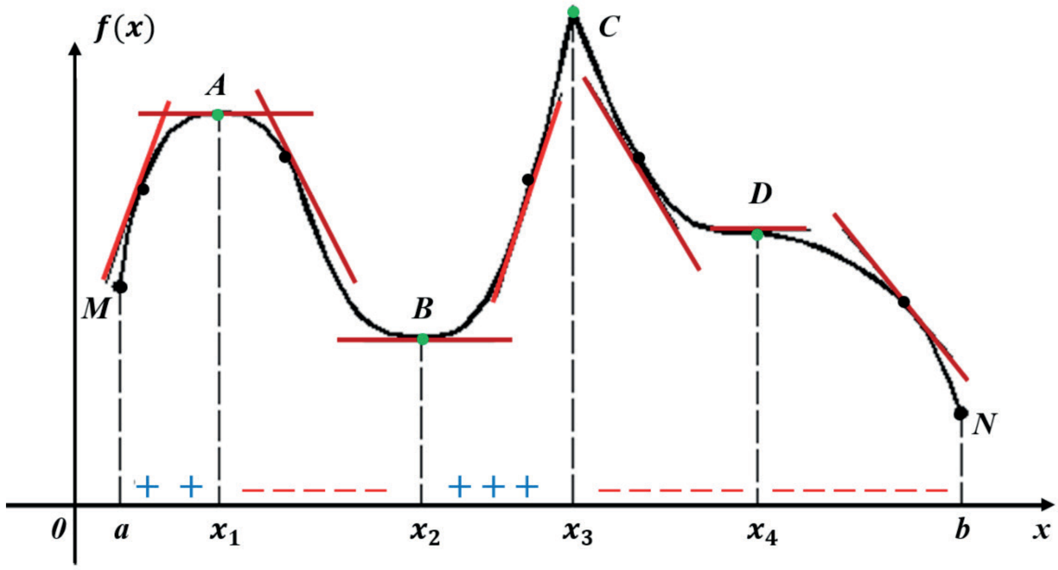
É interessante notar que, caso saibamos para quais valores de *x* a função $f$ é crescente e para quais valores ela é decrescente, saberemos se ela admitirá ou não um máximo ou mínimo local, relativo ao ponto estudado.

Vamos analisar os gráficos a seguir e determinar para quais intervalos do domínio ocorre crescimento e decrescimento da função, bem como para quais valores de *x* a função atinge valor máximo ou valor mínimo, aos quais chamaremos de extremos locais ou pontos críticos.

Seja a função *f* dada pelo gráfico:




Traçando as retas tangentes à curva $f(x)$, ao longo do eixo *x*, no intervalo ]a ; b[ temos:




Analisando o gráfico, podemos concluir que:

• Nos pontos A, B e $D$ temos que: $f'(x_1)=0$, $f'(x_2)=0$ e $f'(x_4)=0$, pois as retas tangentes à curva são paralelas ao eixo $x$.

• $A$ é um ponto de *máximo local* em $x_1$ e a curva $f$ muda de crescente para decrescente, ou ainda, o sinal de $f'(x)$ muda de + para –, sendo que, em $x_1$, temos $f'(x_1) = 0$.

• $B$ é um ponto de *mínimo local* em $x_2$, e esse ponto marca a mudança de decrescente para crescente e o sinal de $f'(x)$ muda de – para +, sendo que em $x_2$ temos $f'(x_2) = 0$.

• $D$ não é ponto de máximo nem de mínimo, pois em sua vizinhança há valores que suplantam $D$ e outros que são inferiores a $D$. Note que não há mudança de sinal da derivada $f'(x)$ em torno de $D$. $D$ é chamado de ***ponto de inflexão***, ou seja, em $D$ a curva muda sua concavidade.

• $C$ é também um ponto de *máximo local* em $x_3$ e marca a mudança de sinal da derivada de $f'(x)$ que, neste caso, muda de + para – embora, nesses ponto $x_3$, a derivada seja inexistente.

• $M$ e $N$ também são chamados de *mínimos locais.*

Feita a análise, podemos concluir o que chamamos de *Teste da Primeira Derivada*.

Em um *ponto crítico* (valor de $x$ em que a derivada é zero) $x = k$:

**1.** Se $f'(x)$ é negativa à esquerda de $k$ e positiva à direita de $k$, então $f'(x)$ possui um *mínimo local* em $k$.

**2.** Se $f'(x)$ é positiva à esquerda de $k$ e negativa à direita de $k$, então $f'(x)$ possui um *máximo local* em $k$.

**3.** Se $f'(x)$ possui o mesmo sinal em ambos os lados de $k$, então temos um *ponto de inflexão* ou *mudança de concavidade* na função.

**Solução:**

Sobre crescimento e decrescimento de funções: a primeira e a segunda derivadas de uma função fornecem informações úteis para se determinar a forma de seu gráfico. Analisando o valor da primeira derivada de uma função $f(x)$, é possível definir se ela é crescente ou decrescente ao longo de um intervalo, pois se $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1) \Rightarrow$ $f(x)$ é crescente, e se $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \leq f(x_1) \Rightarrow f(x)$ é decrescente. É útil lembrar também que $f'(x)$ representa o coeficiente angular da reta tangente à curva $f(x)$ no ponto $x$ e que se o coeficiente angular for positivo, o ângulo entre a reta tangente e o eixo $x$ será menor que 90º; sendo o coeficiente negativo, o ângulo entre a reta e o eixo $x$ será maior que 90º. Temos também o que chamamos de *critério da segunda derivada*, para a identificação de valores de máximos ou mínimos locais de modo mais prático que o critério da vizinhança. Analisando o valor da segunda derivada da função $f(x)$ podemos afirmar se um dado valor $k$ é um máximo ou mínimo.

Vamos a uma aplicação prática do conceito estudado: dada a função $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 13$, determinar as coordenadas de seus pontos críticos e identificá-los, determinando também para quais valores de seu domínio a função será crescente ou decrescente.

**Solução:**

Os pontos críticos de uma função são aqueles em que o valor da derivada no ponto é igual a zero, ou seja, $f'(x) = 0$ ( a reta tangente é paralela ao eixo $x$).

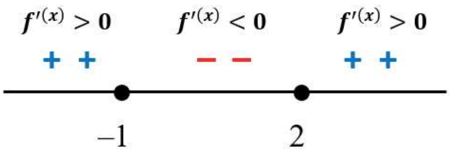
**(I)** Determinar a derivada da função:

Se: $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 13 \implies f'(x) = 6x^2 - 6x - 12$

**(II)** Determinar os pontos críticos, igualando a derivada a zero:

$$6x^2 - 6x - 12 = 0 \implies x_1 = -1 \; ; \; x_2 = 2$$

**(III)** Análise da vizinhança dos críticos:




$$\Longrightarrow \begin{cases} \text{em } x = -1 & \text{temos um máximo} \\ \text{em } x = 2 & \text{temos um mínimo} \end{cases}$$

**(IV)** Cálculo das coordenadas dos críticos e identificação:

Se: $x = -1 \implies f(-1) = 2(-1)x^3 - 3(-1)^2 - 12(-1) + 13 \quad \therefore \quad f(-1) = 20$

Assim, em $(-1{,}20)$ temos um ponto de máximo local.

Se: $x = 2 \implies f(2) = 2(2)x^3 - 3(2)^2 - 12(2) + 13 \quad \therefore \quad f(2) = -7$

Assim, em $(2, -7)$ temos um ponto de mínimo local.

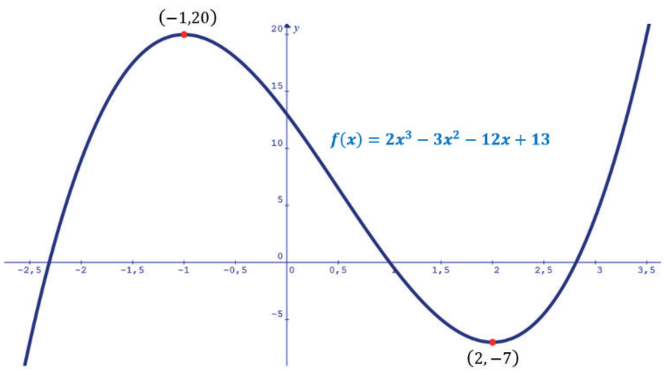
**(V)** Análise do comportamento da função

No intervalo $]-\infty\,;\,-1[$ $\;f(x)$ será crescente

No intervalo $]-1\,;\,2[$ $\;f(x)$ será decrescente

No intervalo $]2\,;\,+\infty[$ $\;f(x)$ será crescente

**(VI)** Gráfico da função validando os resultados obtidos:



**Solução:**

Recomendo fortemente o uso dos aplicativos gráficos Graphmatica (http://www.graphmatica.com/) e Geogebra (https://www.geogebra.org/) para a validação dos resultados obtidos, pois, além de confirmar os acertos e apontar eventuais erros, permitem melhor compreensão dos conceitos estudado.

**Critério da segunda derivada:** para analisar uma função sobre a existência de máximos e mínimos locais, podemos usar, além do critério da vizinhança, usado para a resolução do exercício anterior, usar o critério da 2ª derivada, ou seja:
sejam $f(x)$ uma função derivável num intervalo $]a\,;b[$ e $k$ um ponto crítico neste intervalo, isto é: $f'(k) = 0$, com $a < k < b$. Se $f(x)$ admite $f''(x)$ (segunda derivada) em $]a\,;b[$, temos:

- Se $f''(k) < 0 \implies f(x)$ admite máximo local em $x = k$
- Se $f''(k) > 0 \implies f(x)$ admite mínimo local em $x = k$
- Se $f''(k) = 0 \implies$ o critério falha, devemos fazer a pesquisa na vizinhança do ponto

Faça você: analise as funções dadas com relação a eventuais valores máximos e mínimos locais, quanto ao seu crescimento e decrescimento; identificar os pontos críticos dando suas coordenadas e esboçar o gráfico da situação.

a) $f(x) = 3x^4 - 4x^3$

b) $y = \frac{1}{1+x^2}$

**Solução:**

**Para saber mais: SIBI – Unitau**

| | | |
|---|---|---|
| Ayres: | https://integrada.minhabiblioteca.com.br/books/9788565837446 | p. 98 |
| Hoffmann: | https://integrada.minhabiblioteca.com.br/books/978-85-216-2909-2 | p. 166 |
| Stewart: | https://integrada.minhabiblioteca.com.br/books/9788522126859 | p. 242 |
| Anton: | https://integrada.minhabiblioteca.com.br/books/9788582602263 | p. 232 |

**Biblioteca Pearson**


BASSANEZI, R. C. **Introdução ao cálculo e aplicações.** São Paulo: Contexto, 2015. p. 117. Disponível em: https://plataforma.bvirtual.com.br/Acervo/Publicacao/31203. Acesso em: 02 jul. 2021.

FLEMMING, D. M.; GONÇALVES, M. B. **Cálculo A:** funções, limite, derivação, integração. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2006. p. 212. Disponível em: https://plataforma.bvirtual.com.br/Acervo/Publicacao/748. Acesso em: 02 jul. 2021.

THOMAS, G. B. et al. **Cálculo.** v. 1.12. ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2012. p. 212. Disponível em: https://plataforma.bvirtual.com.br/Acervo/Publicacao/3376. Acesso em: 02 jul. 2021.

### 3.3.1 Problemas de otimização

Denominamos *problemas de otimização* aqueles em que devemos determinar os valores extremos de uma função, ou seja, o maior ou o menor valor que uma função pode assumir em um dado intervalo. Problemas de otimização são bem comuns e, geralmente, surgem quando precisamos determinar o nível de produção mais econômico em uma linha de produção, ou as dimensões de uma caixa para que ela comporte volume máximo, ou a altura máxima alcançada por um projétil, ou o custo mínimo na produção de um dado produto etc. Nota-se, pelo exposto, que a solução de tais problemas passa pela análise do comportamento da função que o modela. Assim, para resolvermos tais problemas, basta obter o modelamento matemático que descreve o fenômeno e, em seguida, aplicar os conceitos estudados em “máximos e mínimos de função”. Vamos às aplicações. As soluções comentadas dos problemas serão no formato de videoaula para facilitar a explicação e o entendimento. Atenção à memória de cálculo usada para a obtenção das respostas.

**Problema 1:** Cortando-se um quadrado de lado $x$ de cada um dos quatro cantos de uma folha retangular de dimensões 15 x 24 e dobrando-se os lados, formamos uma caixa sem tampa. Determinar o valor da medida $x$, a ser cortada, para que, construída a caixa, seu volume seja máximo.

**Solução:**

**Problema 2:** Uma chapa de metal retangular de 30 cm de largura será dobrada, de modo que suas bordas fiquem perpendiculares ao fundo, formando uma calha. Quantos centímetros deve-se dobrar de cada lado de modo que comporte volume máximo?

**Solução:**

**Problema 3:** Qual o maior valor possível para a soma: $senx + \cos x$ ?

**Solução:**

**Problema 4:** Um sitiante deseja construir um galinheiro, de formato retangular, usando 120 m lineares de tela que encontrou em seu depósito. Quais devem ser as dimensões do galinheiro para que ele comporte área máxima? Assista aos vídeos com as soluções

**Solução:**

## 3.4 Síntese da Unidade

Nesta Unidade, vimos os conceitos de derivação superior e derivação implícita. Estudamos o Teorema de L'Hôpital, muito útil para o cálculo de limites de funções que gerem indeterminações. Aprendemos como analisar uma função em relação a eventuais valores de máximos e mínimos, conceito muito útil no traçado do gráfico de funções desconhecidas, determinação dos intervalos em que a função é crescente ou decrescente. Aprendemos também o conceito de ponto crítico e como determiná-lo, fazendo uso das regras de derivação, e uma das principais aplicação da derivada, ou seja, o problemas de otimização. Recomendo fortemente que você pratique, fazendo tantos exercícios quanto seja possível. Leia as referências bibliográficas elencadas ao longo da Unidade para que se familiarize com as notações matemáticas usuais e procure também resolver os problemas nos livros, cujos links estão em cada uma das subunidades desse e-book. Bons estudos.

## 3.5 Para Saber Mais Biblioteca Pearson/Sibi Unitau


BASSANEZI, R. C. **Introdução ao cálculo e aplicações.** São Paulo: Contexto, 2015. Disponível em: https://plataforma.bvirtual.com.br/Acervo/Publicacao/31203. Acesso em: 02 jul. 2021.

CASTANHEIRA, N. P.; LEITE, A. E. **Tópicos de Cálculo I:** limites, derivadas e integrais. Curitiba: InterSaberes, 2017. Disponível em: https://plataforma.bvirtual.com.br/Acervo/Publicacao/49388. Acesso em: 02 jul. 2021.

FACCIN, G. M. **Elementos de cálculo diferencial e integral.** Curitiba: InterSaberes, 2015. Disponível em: https://plataforma.bvirtual.com.br/Acervo/Publicacao/30379. Acesso em: 02 jul. 2021.

FERNANDES, D. B. (Org.). **Cálculo diferencial.** São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2014. Disponível em: https://plataforma.bvirtual.com.br/Acervo/Publicacao/22092. Acesso em: 02 jul. 2021.

FLEMMING, D. M.; GONÇALVES, M. B. **Cálculo A:** funções, limite, derivação, integração. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2006. Disponível em: https://plataforma.bvirtual.com.br/Acervo/Publicacao/748. Acesso em: 02 jul. 2021.

LARRY, G. **Cálculo em quadrinhos.** São Paulo: Blucher, 2014. Disponível em: https://plataforma.bvirtual.com.br/Acervo/Publicacao/164654. Acesso em: 02 jul. 2021.

THOMAS, G. B. et al. **Cálculo.** v. 1. 12. ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2012. Disponível em: https://plataforma.bvirtual.com.br/Acervo/Publicacao/3376. Acesso em: 02 jul. 2021.

Cálculo – Um curso moderno e suas aplicações: https://integrada.minhabiblioteca.com.br/books/978-85-216-2909-2

Frank Ayres: https://integrada.minhabiblioteca.com.br/books/9788565837446

James Stewart: https://integrada.minhabiblioteca.com.br/books/9788522126859

Hoffmann: https://integrada.minhabiblioteca.com.br/books/978-85-216-2909-2

Anton: https://integrada.minhabiblioteca.com.br/books/9788582602263

### Aplicativos Gráficos

Geogebra: https://www.geogebra.org

Graphmatica: http://www.graphmatica.com/

Microsoft Mathematics: https://microsoft-mathematics.br.uptodown.com/windows

### Vídeo Khan Academy

**https://pt.khanacademy.org/math/calculus-home**

## 3.6 Atividade Aprendendo

**1.** Determinar as primeiras quatro primeiras derivadas de $y = 3x^3 + 5x^2 + 2x + 2$ usando a notação de Leibniz.

**Solução:**

**2.** Sendo $y = -3xe^{-4x}$, encontre o valor de $A$, onde $A = \frac{1}{2}\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 4y$.

**Solução:**

**3.** Usando derivação implícita, determine $\frac{dy}{dx}$, dado que $x^2y - xy^2 = 6$.

**Solução:**

**4.** Calcular os limites usando L'Hôpital.

a) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt[3]{x+7} - 2}$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2}$

**Solução:**

**5.** Analisar as funções abaixo com relação a eventuais valores de máximo, mínimo e inflexão, identificando-os, juntamente com suas coordenadas:

a) $f(x) = -4x^3 + 3x^2 + 18x$ b) $y = x^2(x-12)^2$

**Solução:**

**6.** Uma caixa de base retangular será construída, usando-se uma folha de cartolina de 40 cm de largura e 52 cm de comprimento. Para a construção da caixa, serão cortados quadrados de cada canto da folha de cartolina e, em seguida, dobrando-se as laterais perpendicularmente, os lados restantes. Pede-se determinar a medida do lado do quadrado a ser cortado de modo que a caixa construída tenha volume máximo; desprezar a largura da cartolina e eventuais perdas.

**Solução:**

**7.** Um agricultor pretende cercar dois terrenos retangulares, de dimensões $x$ e $y$, com um lado comum em $x$. Considerando que cada um dos terrenos cercados deverá ter $400\text{m}^2$ de área, quais devem ser as dimensões dos terrenos para que a cerca tenha o menor comprimento possível?

**Solução:**

## 3.7 Atividade Praticando

**1.** Se $y = -2xe^{-x}$ , determine o valor de $A$, onde $A = \frac{d^3y}{dx^3} + \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - y$

**2.** Usando derivação implícita, determine $\frac{dy}{dx}$ nas equações abaixo.

a) $2xy + y^2 = x + y$

b) $2x^3y^2 - 2xy^3 - 5x = 3y - 2$

**3.** Calcular os limites usando L'Hôpital

a) $\lim\limits_{x \to 3} \frac{3x - 9}{\sqrt{x+1} - 2}$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos(x) - 1}{\ln(x+1)}$

**4.** Analisar as funções abaixo com relação a eventuais valores críticos, ou seja, valores de máximo, mínimo e inflexão. Identifique-os e encontre suas coordenadas:

a) $f(x) = -x^4 + 2x^2 + 12$

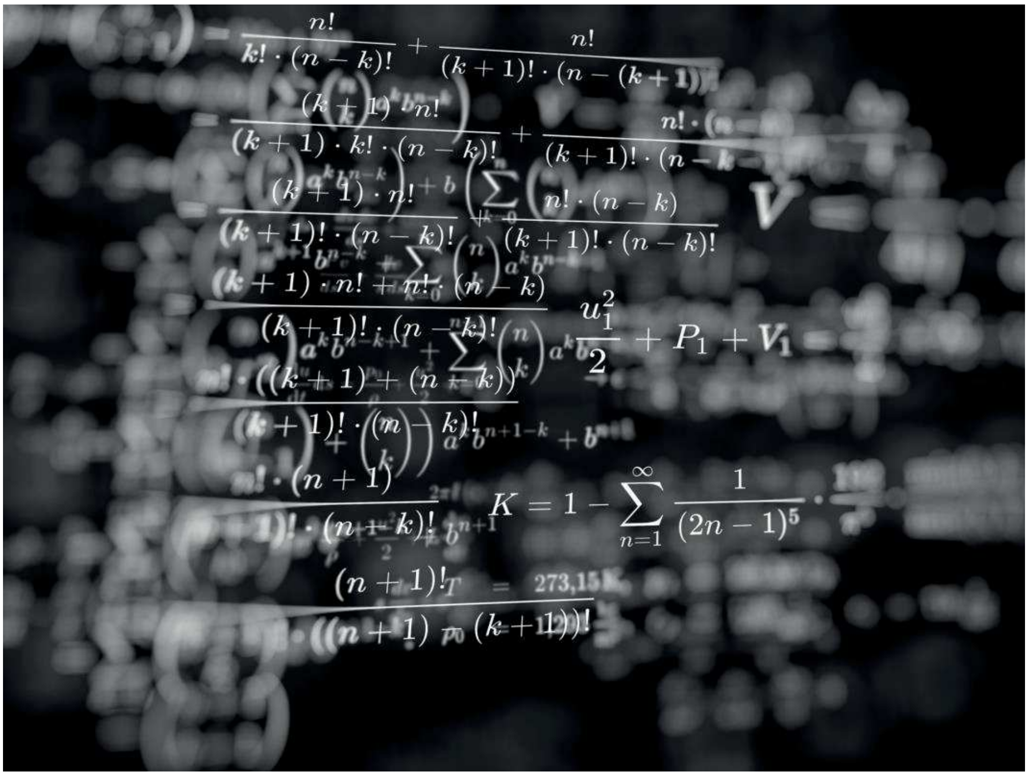
b) $y = 2e^{x^2 - 4x}$

**5.** Um produtor rural estima que o custo total de produção $x$, em toneladas, em milhares de reais, de seu produto é modelado pela equação $C(x) = 0.03x^3 - 1{,}8x^2 + 39x$. Pretendendo vender toda a sua produção, estabelece o preço de venda da tonelada em vinte e um mil reais. Nestas condições, determinar o lucro máximo obtido com a venda.

**Solução:**

# Unidade IV
# Integral I: Definições Iniciais

Nesta Unidade, veremos o conceito algébrico de integral como a antiderivada, ou seja, o processo de integração como a operação inversa à operação de diferenciação, também conhecido como integral indefinida. Abordaremos o conceito geométrico de integral, como sendo a área compreendida entre curvas, assunto conhecido como “Integral de Riemann”. Aprenderemos as regras usuais de integração, fazendo uso das “tabelas de integrais” e, com tais regras, partiremos para a primeira das aplicações do conceito de integrais, determinando a área de uma região compreendida entre curvas no plano.



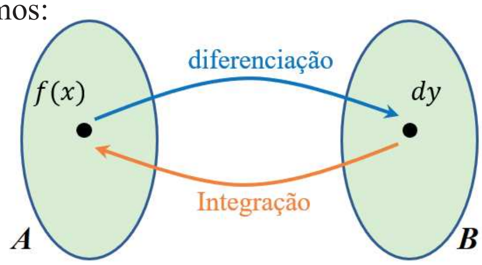
Fonte: Pixabay

## 4.1 Integração indefinida: Antiderivada

Chamamos de integração o processo inverso à diferenciação de uma função. Se na Unidade anterior nosso interesse era encontrar a derivada de uma função, nesta Unidade vamos descobrir como, dada a derivada de uma função, encontrar tal função, também chamada de "primitiva". Desse modo, alguns autores fazem referência ao processo de integração como "primitivação".

Portanto, conhecida a diferencial $\boldsymbol{y'}$ ou $\boldsymbol{dy}$ de uma certa função $y = f(x)$, definiremos a integração indefinida como o processo pelo qual essa $f(x)$ é conhecida.

Graficamente, temos:




$A$ é o conjunto das $f(x)$ deriváveis. $B$ é o conjunto das diferenciais.

Diz-se que a integração é indefinida porque toda função da forma $f(x) + C$, onde C é um valor constante, terá a mesma diferencial obtida pela lei $f'(x) \cdot dx$.

Veja: se $f(x) = 1$, $f(x) = -3$ e $f(x) = 7$, teremos que a derivada, $f'(x) \cdot dx$ ou diferencial será a mesma, pois as constantes 1, – 3 e 7 têm a derivada nula. Portanto, conhecida a diferencial, é indefinida a operação inversa de modo único. O símbolo matemático usado para indicar a operação de integração é um S alongado: $\int$ .

**Solução:**

Veja: se $y = 4x^2 + 6$ temos que $\frac{dy}{dx} = 8x$, ou seja, $dy = 8x \cdot dx$. Assim, podemos escrever que a integral indefinida de $8x \cdot dx$ será igual a $4x^2 + c$. Matematicamente, escrevemos: $\int 8x \cdot dx = 4x^2 + c$.

Outro exemplo de uso da operação e respectiva notação: sendo $y = \frac{10}{3} + x^2 - sen\ x$, a derivada será dada por $dy = (2x - cosx) \cdot dx$. Assim, temos que:

$$dy = (2x - cosx) \cdot dx \Leftrightarrow \int (2x - cosx) \cdot dx \ = x^2 - senx + c$$

Usando rigor matemático, definimos:

$$\int f(x) \cdot dx = g(x) + c \quad \Leftrightarrow \quad g'(x) = f(x)$$

Ou seja: a integral indefinida de uma certa função $f(x)$ é uma nova função $g(x) + c$ de tal modo que a derivada dessa nova função $g(x) + c$ valha $f(x)$.

Alguns exemplos de aplicação do conceito:

- ✓ $\int 3x^2 dx = \ x^3 + c$ , pois, a derivada de $x^3 + c$ é $3x^2$.

É interessante saber que, ao termo $3x^2 \cdot dx$, chamamos de **integrando** da integral indefinida. Note que poderíamos ter escrito $\int 3t^2 dt$ ou $\int 3p^2 dp$ ou ainda $\int 3\alpha^2 d\alpha$ etc. alterando somente a indicação da variável, sendo que, nestes casos, as respostas seriam, respectivamente, $t^3 + c$, $p^3 + c$ e $\alpha^3 + c$.

As variáveis $x, t, p, \alpha ...$ são conhecidas como "variável muda" por não afetar a *ideia* e a *forma* do resultado da operação.

- ✓ $\int \left(-6 \cdot senz + \frac{7}{z} - 5\right) dz = 6 \cdot cosz + 7 \cdot \ln z - 5z + c$

Note que, por *inspeção*, a derivada de $\cos z$ é $-senz$. Assim, multiplicando por 6, temos $6.\cos z$, que nos leva à derivada igual a $6 \cdot (-\text{sen}\, z) = -6 \cdot \text{sen}\, z$, como queremos.

Agora temos que, se a derivada de $\ln z$ é $\frac{1}{z}$, então a derivada de $7\ln z$ é $\frac{7}{z}$.

Para –5, precisamos de –5*z*. Desse modo, temos que:

$$\int \left(-6 \cdot senz + \frac{7}{z} - 5\right) dz = 6cos3z + 7 \ln z - 5z + c$$

Para evitar a *inspeção* ou "tentativa e erro", existem regras operatórias que serão utilizadas para que obtenhamos, de modo prático, a integral de uma dada função.

### 4.1.1 Integrais Imediatas: Uso da Tabela

Integrais Imediatas ou tabeladas são as integrais cujo resultado é conhecido, pois se encaixam perfeitamente em um formulário. Atenção: só é possível usar a tabela se, dado "*u*", houver "*du*" no integrando ("*u*" é função e "*du*", sua derivada).

**1.** $\int k.f(x)dx = k.\int f(x)dx$ A constante multiplicativa "*k*" é posta fora do integrando.

Veja só:

- ✓ $\int 2\cdot\cos x.dx = 2\cdot\int \cos x\cdot dx = 2\cdot senx + c$
- ✓ $\int 4\cos x.dx = 4\int \cos x.dx = 4.\text{sen}\, x + c$
- ✓ $\int \frac{1}{x}\cdot dx = \ln x + c$
- ✓ $\int \frac{3}{4x}dx = \frac{3}{4}\cdot\int \frac{1}{x}\cdot dx = \frac{3}{4}\ln x + c$

**2.** $\int [f(x) \pm g(x)]\cdot dx = \int f(x)\cdot dx \pm \int g(x)\cdot dx$

A integral da soma ou subtração de funções é a soma ou subtração das integrais de cada uma das funções.

Veja só: $\int\left(3x^2 + \cos x - \frac{1}{x}\right)\cdot dx = \int 3x^2\cdot dx + \int \cos x\cdot dx - \int \frac{1}{x}\cdot dx = x^3 + \text{sen}\, x - \ln x + c$

**Atenção! É proibido fazer:**

$$\int f(x)\cdot g(x)\cdot dx = \int f(x)dx\cdot\int g(x)dx$$

$$\int \frac{f(x)}{g(x)}\cdot dx = \frac{\int f(x)\cdot dx}{\int g(x)\cdot dx}$$

Isto é, não é permitido multiplicar ou dividir integrais pelas regras usuais da multiplicação ou divisão, veremos adiante que existem regas especificas para a integral do produto ou divisão entre funções.

**3.** $\int x^n \cdot dx = \frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1} + C \quad \text{para } n \neq -1$ Regra para a integral de uma potência, com expoente $n \neq -1$.

Veja só:

- ✓ $\int 3x^2 dx = 3\int x^2 dx = 3\frac{1}{2+1}x^{2+1} = \cancel{3}\frac{1}{\cancel{3}}x^3 = x^3 + c$
- ✓ $\int \sqrt{x} \cdot dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{\frac{1}{2}+1}x^{\frac{1}{2}+1} = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + c$
- ✓ $\int \frac{1}{x^4} \cdot dx = \int x^{-4} dx = \frac{1}{-4+1} \cdot x^{-4+1} = \frac{-1}{3}x^{-3} + c$

**4.** $\int \frac{1}{x} \cdot dx = \int x^{-1} dx = \ln|x| + c$ Regra para a integral de uma potência, com expoente $\mathbf{-1}$ .

Aqui, o logaritmo é do "*módulo de x*", porque se for $\ln(x)$ a derivada será $\frac{1}{x} \cdot x' = \frac{1}{x} \cdot 1 = \frac{1}{x}$ e, em $\ln(-x)$, temos que a derivada será: $\frac{1}{-x} \cdot (-x') = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$.

É interessante notar que as regras 3 e 4 podem ser generalizadas:

$$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c \quad \text{e} \quad \int \frac{du}{u} = \ln|u| + c$$

Onde "$u$" é uma função e "$du$" sua derivada.

Mais algumas regras operatórias envolvendo funções trigonométricas e exponencial:

**5.** $\int \cos u \cdot du = \operatorname{sen} u + c$

**6.** $\int \operatorname{sen} u \cdot du = -\cos u + c$ com: $u = u(x)$

**7.** $\int e^u du = e^u + c$

Para conhecer e saber usar as regras de integração, use a "**Tabela Básica de Integrais**" preparada pelo professor.

É interessante que você monte a "sua tabela", transcrevendo as fórmulas mais usadas em uma nova tabela feita por você.

**Tabela Básica de Integrais**

**Usando a tabela de integrais**

Veja como usar a tabela para a resolução de integrais "imediatas".

- Calcular $\int \sec x \cdot dx$ .

**Solução:** usando a fórmula 20 da tabela, temos que: $\int \sec x \cdot dx = \ln|\sec x + \operatorname{tg} x| + c$

- Calcular $\int \frac{dx}{4+x^2}$ .

**Solução:** reescrevendo o integrando para adequá-lo à uma tabelada, temos que: $\int \frac{dx}{4+x^2} = \int \frac{dx}{x^2+2^2}$.

Usando a fórmula 29 da tabela, temos: $\int \frac{dx}{4+x^2} = \int \frac{dx}{x^2+2^2} = \frac{1}{2}\, arctg\, \frac{x}{2} + c.$

$$\therefore \int \frac{dx}{4+x^2} = \frac{1}{2}\, arctg\, \frac{x}{2} + c$$

- Determinar $\int \left(2x^4 + 8x - 9\right) \cdot dx$

**Solução:** como a integral da soma é a soma das integrais, podemos escrever:

$\int (2x^4 + 8x - 9)dx = \int 2x^4 dx + \int 8x dx - \int 9 dx = 2\int x^4 dx + 8\int x dx - 9\int dx = 2\frac{x^5}{5} + 8\frac{x^2}{2} - 9x + c$

$$\therefore \int (2x^4 + 8x - 9)dx = \frac{2x^5}{5} + 4x^2 - 9x + c$$

Note que, para a resolução, usamos as fórmulas 1, 3, 6 e 7.

- Sendo $a$ e $k$ constantes, determinar: $\int \left(3a - kx^4\right) \cdot dx$

**Solução:**

$\int (3a - kx^4)dx = 3\, a \int dx - k \int x^4 dx = 3ax - k\frac{x^5}{5} + c \quad \therefore \int (3a - kx^4)dx = 3ax - \frac{kx^5}{5} + c$

- Calcular $\int (5x+3)^2 dx =$

**Solução:** abrindo o produto notável do integrando...

$\int (5x+3)^2 dx = \int (25x^2 + 30x + 9)dx = 25\int x^2 dx + 30\int x dx + 9\int dx =$

$$\frac{25x^3}{3} + 15x^2 + 9x + c$$

$$\therefore \int (5x+3)^2 dx = \frac{25x^3}{3} + 15x^2 + 9x + c$$

**Solução:**

Faça você: usando a tabela de integrais, calcular:

a) $\int x^2(\sqrt{x}-\frac{4}{x^3})dx$ b) $\int \frac{dz}{z^2+7}$ c) $\int 7^t dt$ d) $\int \frac{dx}{x^2-5}$

**Solução:**

Muitas vezes, uma integral tem resolução simples quando substituímos alguma expressão do integrando por uma nova variável. Esse artificio permite que adequemos a integral a ser calculada a uma "tabelada". Tal técnica chamamos de "troca de variáveis". Veja só algumas aplicações:

Calcular: $\int x^2.e^{x^3}\cdot dx$

**Solução:** vamos adequar o integrando para usarmos a fórmula 2: $\int e^u \cdot du = e^u + c$, então, chamando $x^3$ (expoente de $e$) de "$u$", temos: $u = x^3 \Leftrightarrow du = 3x^2 \cdot dx$. Logo, se $u = x^3$, o termo $x^2 \cdot dx = \frac{1}{3}du$ e a integral dada poderá ser escrita como:

$$\int x^2 e^{x^3} dx = \int e^{x^3}\, x^2 dx = \int e^u \cdot \frac{1}{3} du = \frac{1}{3}\int e^u du = \frac{1}{3}e^{x^3} + c$$

$$\therefore \boxed{\int x^2.e^{x^3} \cdot dx = \frac{1}{3}e^{x^3} + c}$$

Mais um exemplo: calcular $\int \sqrt{3x-1} \cdot dx$.

**Solução:**

Fazendo: $3x-1=u \Rightarrow 3dx=du \quad \therefore dx=\frac{1}{3}du$. Assim, temos:

$$\int \sqrt{3x-1} \cdot dx = \int \sqrt{u} \cdot \frac{1}{3}du = \frac{1}{3}\int u^{\frac{1}{2}}du = \frac{1}{3} \cdot \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{9} \cdot u^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{9} \cdot (3x-1)^{\frac{3}{2}} + c$$

$$\therefore \boxed{\int \sqrt{3x-1}\, dx = \frac{2}{9}(3x-1)^{\frac{3}{2}} + c}$$

Mais um exemplo: calcular $\int x\sqrt{2-3x^2} \cdot dx$

**Solução:**

Vamos eliminar o radical, chamando o radicando $2-3x^2$ de $u^2$.

Então: $2-3x^2 = u^2$ derivando ambos os membros, temos: $-6x \cdot dx = 2u \cdot du$, portanto:

$x \cdot dx = \frac{-1}{3}u \cdot du$.

Assim, trocamos $2-3x^2$ por $u$ leva e $x \cdot dx$ por $-\frac{1}{3}u \cdot du$, pois, se $u^2 = 2-3x^2$, $u=\sqrt{2-3x^2}$.

$$\therefore \int x\sqrt{2-3x^2} = \int \sqrt{2-3x^2} \cdot x \cdot dx = \int \sqrt{u^2} \cdot -\frac{1}{3}u \cdot du =$$

$$= -\frac{1}{3}\int u^2 \cdot du = -\frac{1}{3} \cdot \frac{u^3}{3} = -\frac{1}{9}u^3 = -\frac{1}{9}\left(\sqrt{2-3x^2}\right)^3 + c$$

$$\therefore \boxed{\int x\sqrt{2-3x^2} \cdot dx = -\frac{1}{9}\left(\sqrt{2-3x^2}\right)^3 + c}$$

Outro exemplo da técnica: $\int x^3 \cdot \sqrt{2x^4+5} \cdot dx$

**Solução:**

Sendo: $u = 2x^4 + 5 \;\Rightarrow\; du = 8x^3\ dx$, ajustando a integral dada para resolver usando a fórmula 3 da tabela, temos:

$$\int x^3 \cdot \sqrt{2x^4+5} \cdot dx = \int (2x^4+5)^{\frac{1}{2}}\ x^3\ dx.$$ Fazendo aparecer o "*du*" no integrando:

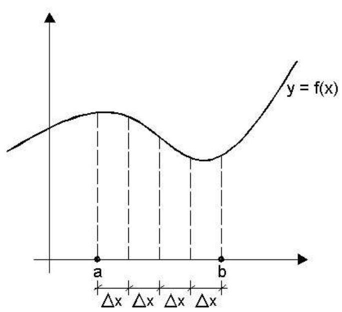
$$\int (2x^4+5)^{\frac{1}{2}}\ x^3\ dx = \frac{1}{8}\int (2x^4+5)^{\frac{1}{2}}\ 8.x^3\ dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int u^{\frac{1}{2}} du = \frac{1}{8}\cdot\frac{u^{\frac{3}{2}}}{3/2} = \frac{1}{8}\frac{2}{3}\cdot u^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{12}\left(2x^4+5\right)^{\frac{3}{2}} + c$$

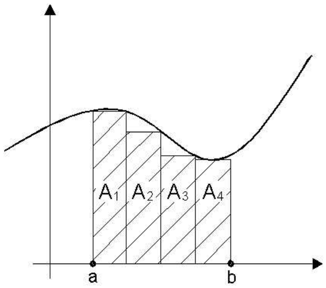
$$\therefore \quad \boxed{\int x^3 \cdot \sqrt{2x^4+5} \cdot dx = \frac{1}{12}\left(2x^4+5\right)^{\frac{3}{2}} + c}$$

**Solução:**

## 4.2 Teorema Fundamental do Cálculo: A Integral definida ou Integral de Riemann

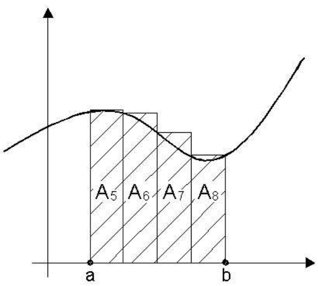



O matemático Riemann desejou obter o cálculo de áreas planas de modo exato. Para isso, ele pensou em considerar uma *f(x)* positiva – gráfico acima do eixo $x$ – no intervalo $[a,\ b]$, dividindo esse intervalo em $n$ partes. No gráfico ao lado, temos $n = 4$.




Usando a **altura menor** de cada faixa, ele determinou a **soma inferior** das áreas dos retângulos de base $\Delta x$ com a altura assumida em cada faixa.

$$Soma\ Inferior = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = A_{\text{inf}}$$




De modo análogo, usando a **altura maior**, mantendo a largura da base igual a $\Delta x$, obteve a **soma superior**:

$$Soma\ Superior = A_5 + A_6 + A_7 + A_8 = A_{\text{sup}}$$

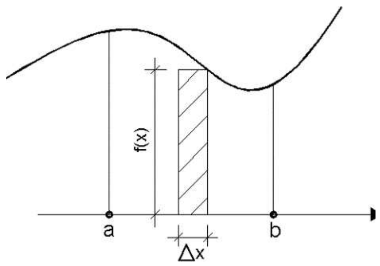
Desse modo, ele concluiu que a **área sob a curva** seria bem representada por $\dfrac{A_{\text{inf}} + A_{\text{sup}}}{2}$, que é a média aritmética das áreas inferior e superior.

Mas, com 4 partes, a precisão do resultado não era boa. Riemann, então, considerou 10 partes, 100 partes etc... até que, quando o número ***n*** de partes **tendesse ao infinito**, a soma inferior e a soma superior tinham tendência de se coincidirem. Essa ideia, em notação matemática, é escrita como:

$$A_{inf} \leq Área\ sob\ f(x)\ positiva\ \leq A_{sup}\ \ em\ [a\,;b]$$

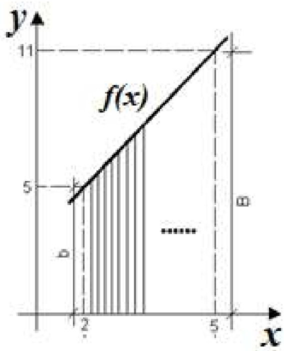
$$\text{Quando } n \longrightarrow \infty\ \Longrightarrow A_{inf} = A_{sup} = Área\ sob\ f(x)\ \ em\ [a\,;b]$$

Por outro lado, qualquer que seja $\Delta x$, sempre haverá uma altura $y = f(x)$ para cada $x \in [a,b]$ e as áreas inferior ou superior poderão ser escritas como: $A_{\text{sup(inf)}} = \sum f(x) \cdot \Delta x$, onde $f(x)$ equivale às alturas dos "retângulos elementares".



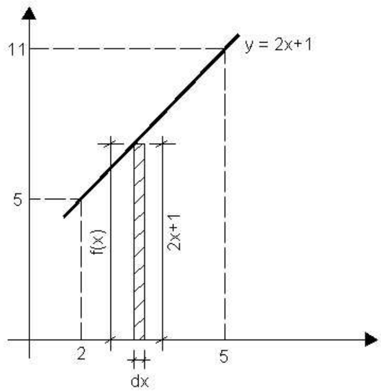

Mas, para $n \longrightarrow \infty$, temos: $\sum_a^b f(x) \cdot \Delta x \Rightarrow \int_a^b f(x) \cdot \Delta x$,

onde o símbolo $\int_a^b$ quer representar $\sum_a^b$ com $n \rightarrow \infty$, indicando a **somatória dos infinitos retângulos** de áreas $f(x) \cdot \Delta x$ no intervalo $[a,b]$.




Posteriormente, a grandeza "$\Delta x$" foi trocada pela notação "*dx*", que melhor representa uma grandeza infinitamente pequena.

Desse modo, podemos interpretar o resultado da notação matemática $\int_2^5 (2x+1)dx$ como aquele que representa a área entre a curva ou função $f(x) = 2x + 1$ e o eixo $x$, no intervalo [2, 5], e que realizamos a soma de todas as áreas dos infinitos *retângulos elementares*, de base "*dx*" e altura igual $f(x) = 2x + 1$, para cada valor do domínio $x \in [2\,;5]$.




Note que: 1 **retângulo elementar** terá área igual a "$2x + 1$" vezes "*dx*", ou seja, $(2x + 1) \cdot dx$ é a área de um retângulo elementar, levantado num ponto $x$ com altura $2x + 1$ (que é $f(x)$, com base *dx,* largura da faixa).

Efetuando a soma dos infinitos retângulos elementares, matematicamente, escrevemos:

$$(n \rightarrow \infty) \quad \sum_2^5 (2x+1) \cdot \Delta x \Rightarrow \int_2^5 (2x+1) \cdot dx$$

Interpretamos esse cálculo como a área sob a curva $f(x) = 2x + 1$ (uma reta) no intervalo entre $x = 2$ até $x = 5$. É, também, possível obter o valor dessa área através da fórmula da área do trapézio:

$$Área = \frac{(B+b) \cdot h}{2} = \frac{(11+5) \cdot 3}{2} = 24$$

É interessante notar também que 24 é a solução de $\int_2^5 (2x + 1)dx$. Veja só:

$$\int_2^5 (2x + 1)dx = x^2 + x \Big|_2^5 = [(5)^2 + (5)] - [(2)^2 + (2)] = [30 - 6] = 24$$

$$\therefore \int_2^5 (2x + 1)dx = 24$$

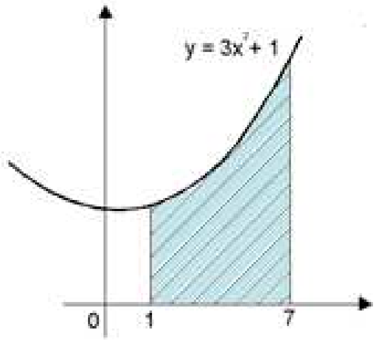
Note que, no caso em questão, não usamos a constante "*c*", por ser tratar de uma *integral definida*, ou seja, ela apresenta *limites de integração*, sendo que o limite inferior é 2 e o limite superior é 5.

É interessante observar que o resultado obtido somente representará uma área caso a região compreendida sob a curva, no dado intervalo, esteja acima do eixo *x*. Não estando, devemos tomá-la em módulo.

Praticando e refletindo: $\int_1^6 (5 + 3x)dx$ significa a área entre a curva e o eixo *x*, no intervalo de 1 a 6 ?

**Solução:**

## 4.3 Aplicação das Integrais: Cálculo de áreas entre curvas




No tópico anterior, vimos que a integral definida $\int_1^7 (3x^2 + 1)dx$ pode representar a área sob a curva, conforme mostra o gráfico ao lado.

Essa área é obtida pela divisão do intervalo [1, 7] em um número finito de partes, calculando-se a soma das áreas desses retângulos inferiores + superiores e dividindo o resultado por 2, atribuindo a **média aritmética** como resultado.

Também vimos que esse processo era, para $f(x)$ **positiva**, toda a região acima do eixo $x$, e que o resultado é aproximado, dependendo do número de divisões do intervalo.

Pois bem, vejamos como obter $\int_a^b f(x) \cdot dx$ e quando isso é possível.

**Teorema Fundamental do Cálculo Integral**: se existe uma função $g(x)$ para a qual $f(x)$ é sua derivada, então a integral de $f(x)$ é $g(x) + c$. No caso de adotarmos um intervalo [a . b], passaremos a ter o que chamamos de integral definida, e escrevemos que:

$$\int_a^b f(x) \cdot dx = [g(x)]_a^b = g(b) - g(a)$$

Como exemplo, vamos calcular a integral definida e verificar se o resultado obtido corresponde à área sob a curva no intervalo dado: $\int_1^4 \sqrt{3x+5} \cdot dx$.

**Solução:** primeiro calculamos $\int \sqrt{3x+5}$ sem nos preocupar com os limites de integração 1 e 4.

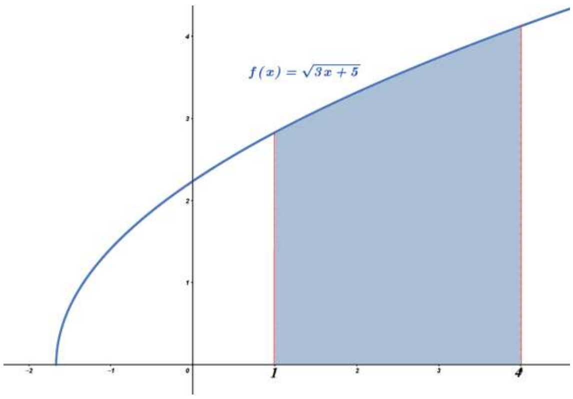
$$\int \sqrt{3x+5}dx = \int (3x+5)^{\frac{1}{2}}dx = \int u^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{3}du = \frac{1}{3}\int u^{\frac{1}{2}} \cdot du = \frac{1}{3} \cdot \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{9} \cdot u^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{9}(3x+5)^{\frac{3}{2}} + c$$

$$\left.\begin{array}{l} u = 3x+5 \\ du = 3dx \end{array}\right|$$

$$\Rightarrow \int_1^4 \sqrt{3x+5}dx = \left[\frac{2}{9}(3x+5)^{\frac{3}{2}}\right]_1^4 = \frac{2}{9}(3 \cdot 4+5)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{9}(3 \cdot 1+5)^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{9}\left(17^{\frac{3}{2}} - 8^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{2}{9}(47,465) \cong 10,547$$

$$\therefore \int_1^4 \sqrt{3x+5}\,dx \cong 10{,}55$$

**Solução:**



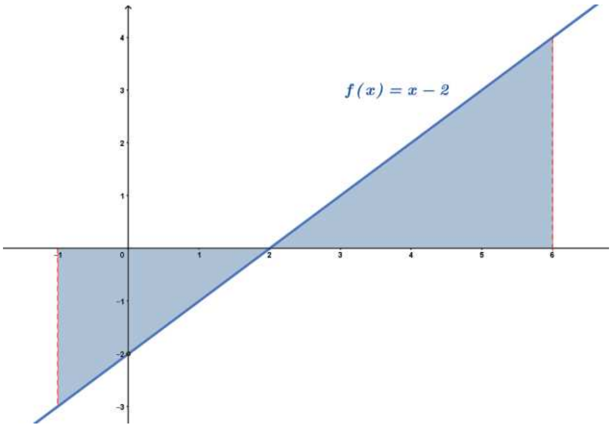

Como o gráfico ao lado nos mostra, no intervalo [1 ; 4], toda a região está acima do eixo $x$, temos que o resultado obtido corresponde à área sob a curva no intervalo dado.

Caso algum trecho do gráfico esteja abaixo do eixo $x$, como no próximo exemplo, veja como proceder:

Determinar a área da região compreendida pela curva $f(x) = x - 2$ e o eixo $x$, no intervalo [-1 ; 6].

**Solução:** primeiramente, devemos esboçar o gráfico da curva e verificar se há algum trecho abaixo do eixo $x$.

Note que a função é de primeiro grau, portanto uma reta, que corta o eixo $x$ em 2 e corta o eixo $y$ em –2, com inclinação menor que 90º. Note também que, à esquerda da raiz "2", a região está abaixo do eixo $x$.




Assim, o cálculo da área da região será dado pela expressão:

$A_R = \left|\int_{-1}^{2}(x-2)dx\right| + \int_{2}^{6}(x-2)dx$ ou ainda,

$$A_R = -\int_{-1}^{2}(x-2)dx + \int_{2}^{6}(x-2)dx$$

Resolvendo a integral sem considerar, inicialmente, os extremos de integração, temos que:

$$\int (x-2)dx = \frac{x^2}{2} - 2x$$

Substituindo na expressão da área da região, e entrando com o respectivo intervalo de integração, temos:

$$A_R = -\int_{-1}^{2}(x-2)dx + \int_{2}^{6}(x-2)dx = -(\frac{x^2}{2} - 2x)\Big|_{-1}^{2} + (\frac{x^2}{2} - 2x)\Big|_{2}^{6}$$

$$\therefore\ A_R = -\left\{\left[\frac{(2)^2}{2} - 2(2)\right] - \left[\frac{(-1)^2}{2} - 2(-1)\right]\right\} + \left\{\left[\frac{(6)^2}{2} - 2(6)\right] - \left[\frac{(2)^2}{2} - 2(2)\right]\right\}$$

$$\therefore\ A_R = -\left\{[2-4] - \left[\frac{1}{2} + 2\right]\right\} + \{[18-12] - [2-4]\}$$

$$\therefore\ A_R = -\left\{-2 - \frac{5}{2}\right\} + \{6+2\} = \frac{9}{2} + \frac{16}{2} = \frac{25}{2}$$

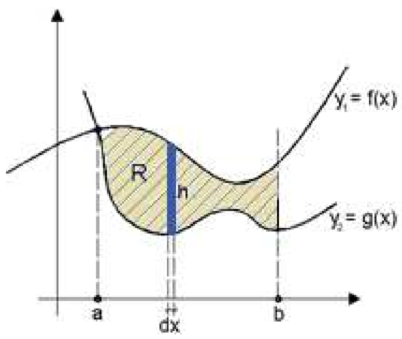
$$\therefore\ \boxed{A_R = \frac{25}{2}\, u^2}$$

**Solução:**

É importante notar neste caso que, sendo a região formada por dois triângulos, podemos determinar a área da região usando matemática básica. Veja só:

$$\acute{A}rea_1 = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{3.3}{2} = \frac{9}{2}\ \mathrm{u}^2 \qquad \therefore \quad \acute{A}rea_2 = \frac{b.h}{2} = \frac{4 \cdot 4}{2} = \frac{16}{2} = 8\ \mathrm{u}^2$$

$$\Rightarrow \boxed{A_T = \frac{9}{2} + \frac{16}{2} = \frac{25}{2}\ \mathrm{u}^2}$$

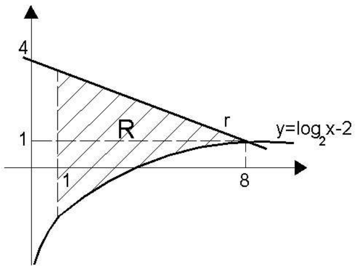



De modo prático, para determinar a área de uma região compreendida entre duas ou mais curvas, usamos o seguinte conceito: a figura ao lado nos mostra uma região ***R*** abaixo da curva $y_1 = f(x)$ e acima de $y_2 = g(x)$, entre os pontos $x = a$ e $x = b$ (pontos de intersecção entre $y_1$ e $y_2$). A área de ***R*** pode ser obtida calculando a área $A_1$ (área sob $y_1 = f(x)$ entre $a$ e $b$, acima do eixo $x$) e subtraindo dela a área $A_2$ (área sob $y_2 = g(x)$ acima do eixo $x$ entre $a$ e $b$). Porém, sabendo que entre g($x$) e f($x$) existe, no intervalo $x \in [a, b]$, sempre uma faixa vertical $h$ que é dada por: $h = f(x) - g(x)$ para cada $x \in [a, b]$, altura do retângulo elementar, então a área da região ***R*** será dada por: $A_R = \sum h \cdot dx \;\Rightarrow\; A_R = \int_a^b [f(x) - g(x)] \cdot dx$.

A regra geral é: "curva superior **menos** curva inferior", independentemente do posicionamento do gráfico, ou seja, não importa que uma ou outra ou ambas as curvas estejam acima ou abaixo do eixo $x$, as curvas podem estar em qualquer quadrante. Para se obter o ponto de intersecção entre as curvas, ou seja, os extremos de integração, basta fazer $y_1 = y_2$ e encontrar os pontos comuns às curvas.

**Solução:**

Veja só: determinar a área da região hachurada no gráfico abaixo:




**Solução:** a reta $r$ passa pelos pontos (0 , 4) e (8 , 1). A equação da reta $r$ é dada por:

$$\frac{y-1}{x-8} = \frac{1-4}{8-0} \Rightarrow y = -\frac{3}{8}x + 4.$$

A área $\boldsymbol{R}$, entre $x = 1$ e $x = 8$, está sempre abaixo da reta e acima da curva logarítmica. Assim, temos que: $A_R = \int_a^b \left[ curva_{\text{sup}} - curva_{\text{inf}} \right] \cdot dx$.

$$\therefore\ A_R = \int_1^8 [f(x) - g(x)] \cdot dx = \int_1^8 \left[ \left( -\frac{3}{8}x + 4 \right) - \left( \log_2 x - 2 \right) \right] \cdot dx = \int_1^8 \left( -\frac{3}{8}x - \log_2 x + 6 \right) \cdot dx$$

Que, resolvida, resulta em: $A_R = \{ -\frac{3x^2}{16} - \frac{1}{\ln 2} \left[ x \ln|x| - x \right] + 6x \}_1^8 =$

$$= \{ -\frac{3 \cdot 64}{16} - \frac{1}{\ln 2} [8 \ln 8 - 8] + 48 \} - =$$

$$= -\{ -\frac{3 \cdot 1}{16} - \frac{1}{\ln 2} [1 \ln 1 - 1] + 6 \}$$

$$\therefore A_R = 16{,}29\ \text{u}^2$$

Note que: a resolução de $\int \log_2 x \cdot dx$ será: $\log_2 x = \dfrac{\ln x}{\ln 2} = \dfrac{1}{\ln 2} \cdot \ln x$

$$\therefore \int \log_2 x \cdot dx = \int \frac{1}{\ln 2} \ln x dx = \frac{1}{\ln 2} \int \ln x \cdot dx = \frac{1}{\ln 2}\left[x \cdot \ln|x| - x\right] + C$$

## 4.4 Síntese da Unidade

Nesta Unidade, vimos o conceito algébrico e geométrico da integral como uma antiderivada e a área de uma região entre curvas num dado intervalo, respectivamente. Vimos também como determinar a integral de uma função usando a tabela de integrais, e estudamos a primeira das técnicas para resolução de integrais, ou seja, o método da "troca de variáveis". E, ainda, conhecemos o conceito mais relevante da Unidade, a integral definida, estabelecida pelo matemático Riemann, além do "Teorema Fundamental do Cálculo".

## 4.5 Para Saber Mais

**SIBI – Unitau:**

Ayres: https://integrada.minhabiblioteca.com.br/books/9788565837446

Hoffmann: https://integrada.minhabiblioteca.com.br/books/978-85-216-2909-2

Ávila: https://integrada.minhabiblioteca.com.br/books/978-85-216-2128-7

Stewart: https://integrada.minhabiblioteca.com.br/books/9788522126859

Anton: https://integrada.minhabiblioteca.com.br/books/9788582602263

Spiegel: Manual de Tabelas e Fórmulas Matemáticas:
https://integrada.minhabiblioteca.com.br/books/9788540700567

**Biblioteca Pearson:**

BASSANEZI, R. C. **Introdução ao cálculo e aplicações.** São Paulo: Contexto, 2015. Disponível em: https://plataforma.bvirtual.com.br/Acervo/Publicacao/31203. Acesso em: 02 jul. 2021.

CASTANHEIRA, N. P.; LEITE, A. E. **Tópicos de Cálculo I:** limites, derivadas e integrais. Curitiba: InterSaberes, 2017. Disponível em: https://plataforma.bvirtual.com.br/Acervo/Publicacao/49388. Acesso em: 02 jul. 2021.

FACCIN, G. M. **Elementos de cálculo diferencial e integral.** Curitiba: InterSaberes, 2015. Disponível em: https://plataforma.bvirtual.com.br/Acervo/Publicacao/30379. Acesso em: 02 jul. 2021.

FERNANDES, D. B. (Org.). **Cálculo diferencial.** São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2014. Disponível em: https://plataforma.bvirtual.com.br/Acervo/Publicacao/22092. Acesso em: 02 jul. 2021.

FLEMMING, D. M.; GONÇALVES, M. B. **Cálculo A:** funções, limite, derivação, integração. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2006. Disponível em: https://plataforma.bvirtual.com.br/Acervo/Publicacao/748. Acesso em: 02 jul. 2021.

LARRY, G. **Cálculo em quadrinhos.** São Paulo: Blucher, 2014. Disponível em: https://plataforma.bvirtual.com.br/Acervo/Publicacao/164654. Acesso em: 02 jul. 2021.

THOMAS, G. B. et al. **Cálculo.** v.1. 12. ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2012. Disponível em: https://plataforma.bvirtual.com.br/Acervo/Publicacao/3376. Acesso em: 02 jul. 2021.

**Vídeos:**

Khan Academy:

https://pt.khanacademy.org/math/calculus-home#integration-calc

https://pt.khanacademy.org/math/calculus-home#integration-techniques-calc

https://pt.khanacademy.org/math/calculus-home#derivative-applications-calc

## 4.6 Aprendendo

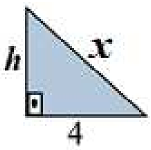
**1.** Calcular as integrais indefinidas:

a) $\int \frac{dz}{\sqrt{49-z^2}}$ b) $\int \sqrt{5-y^2} \cdot dy$ c) $\int \left(4x^3 - 2x^2 + 8x + 1\right) dx$

d) $\int \sqrt{1+z^2} \cdot dz$ e) $\int \frac{\operatorname{sen} 3x \cdot dx}{3+\cos 3x}$ f) $\int \frac{x^2}{e^{2x^3}} dx$

**Solução:**

**2.** Determinar $\int h \cdot dx$ , onde $h$ é dado pela figura abaixo.




**Solução:**

**3.** Determinar a área da região compreendida pela curva e o eixo $x$, entre as retas verticais dadas:

a) $y = x^3;\ x = 0;\ x = 2$

b) $y = x^2 - 3x;\ x = -3;\ x = 1$

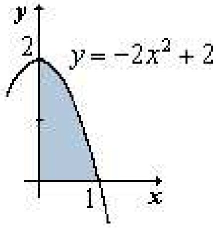
**Solução:**

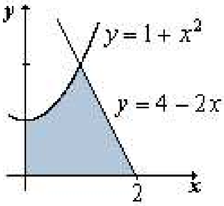
**4.** Calcular as integrais definidas:

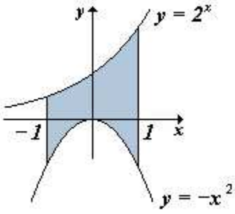
a) $\int_{1}^{4}\left(x^{2}-3x\right)\cdot dx$ b) $\int_{2}^{6}\frac{dx}{\sqrt{x}}$ **c)** $\int_{1}^{2}\left(4x^{3}-2x^{2}+8x+1\right)dx$

**Solução:**

**5.** Determine a área das regiões sombreadas nas figuras abaixo, usando integrais.

a) 


b) 


c) 


**Solução:**

**6.** Resolva as seguintes integrais indefinidas usando a técnica **troca de variáveis:**

a) $\int (x^2+4)^2\, 2x\, dx,\quad$ faça: $u = x^2+4$

b) $\int (x^2+3x+5)^3 (2x+3)\, dx,\quad$ faça: $u = x^2+3x+5$

c) $\int sen^2 x \cos x\, dx,\quad$ faça: $u = senx$

d) $\int x\sqrt{x^2+3}\, dx,$ faça: $u = x^2+3$

e) $\int x^3 . e^{x^4}\, dx,\quad$ faça: $u = x^4$

f) $\int \frac{dx}{x\ln|x|}\ ,\quad$ faça: $u = \ln|x|$

**Solução:**

## 4.7 Praticando

**1.** Calcular as integrais indefinidas:

a) $\int xe^{x^2} dx$

b) $\int 4^{2-3x} dx$

c) $\int 4\,sen\frac{x}{2} dx$

d) $\int \frac{(x^3-1)\cdot dx}{x^4-4x+1}$

e) $\int \operatorname{sen} 4x \cdot \cos 4x \cdot dx$

f) $\int x \cdot \sqrt{x^2-1} \cdot dx$

g) $\int \frac{4x}{3x^2+4} dx$

h) $\int tg^5 x \sec^2 x\, dx$

**2.** Determinar a área da região compreendida pela curva e o eixo $x$, entre as retas verticais dadas:

a) $y = x^2 - 3x;\ \ x = 1;\ \ x = 4$

b) $y = e^x;\ \ x = \frac{1}{2};\ \ x = 3$

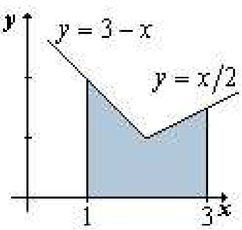
**3.** Calcular as integrais definidas:

a) $\int_1^3 \frac{2x^3 - 4x^2 + 5}{x^2}\, dx$

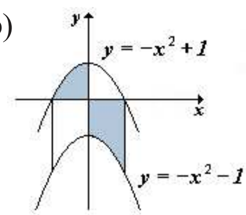
b) $\int_0^1 x^2 \left( \sqrt[3]{x} - \sqrt{x} \right) dx$

**4.** Determine a área das regiões sombreadas nas figuras abaixo, usando integrais:

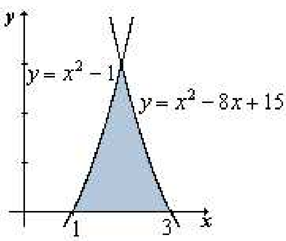
a)




b)




c)




**5.** Resolva as seguintes integrais indefinidas usando a técnica **troca de variáveis:**

a) $\int \frac{dx}{\sqrt{3x - 5}}$

b) $\int e^{2x} dx$

c) $\int x^2 \sec^2 x^3\, dx$

d) $\int \frac{sen\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, dx$

e) $\int \frac{x^2 - 2}{x^3 - 6x + 1}\, dx$

f) $\int \left( x^3 - 2x + 1 \right)^2 \left( 3x^2 - 2 \right) dx$

g) $\int x\sqrt{3x^2 + 3}\, dx$

h) $\int \frac{x^2 - 1}{x}\, dx$

**6.** Dadas as funções abaixo, determinar a área da região compreendida pela curva e o eixo $x$ entre as retas dadas:

a) $y = 4 - x^2$, retas $x = -1$ e $x = 3$

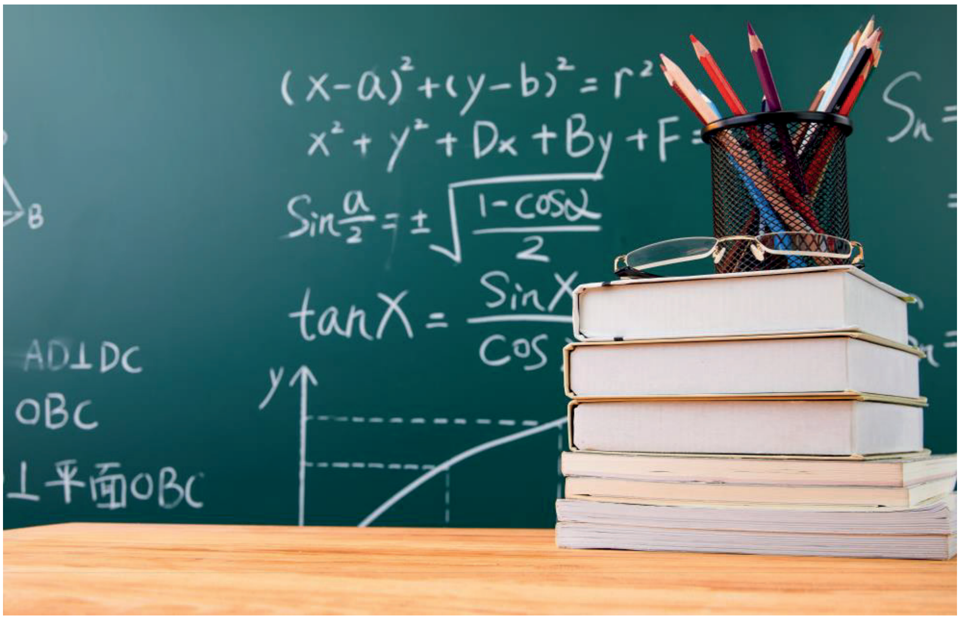
b) $g(x) = -x^2 - 3x + 10$ e as retas $x = -2$ e $x = 4$

c) $y_1 = e^{2x}$ , e as retas $x = -2$ e $x = 4$

**Solução:**

# Unidade V
# Integral II: Técnicas de Integração

Nesta Unidade estudaremos as técnicas de integração, ou seja, como calcular integrais que não se adequam às tabelas, exceto após determinado trabalho algébrico. Veremos inicialmente a técnica chamada Substituição Trigonométrica, na sequência a Integração por Partes e, fechando a Unidade, a técnica denominada Frações Parciais.

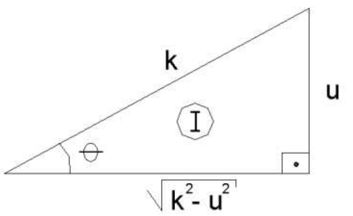



Fonte: Freepik

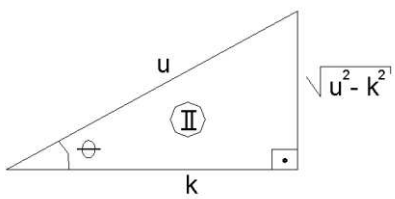
## 5.1 Integração por Troca de Variáveis:  Substituição Trigonométrica

De forma intuitiva, usamos na Unidade IV a técnica "troca de variáveis", ao chamarmos uma dada função de "$u$" desde que tenhamos "$du$" no integrando, para facilitar o processo de integração, caindo em uma integral tabelada. Agora vamos além, pois é frequente aparecer uma integral cujo termo a ser integrado apresenta expressões do tipo $u^2+k^2$ , $u^2-k^2$ ou $k^2-u^2$, envolvendo ou não um radical, onde $u=u(x)$  e  $k=c^{te}$. Nestes casos, para facilitar a resolução, a variável $u$ deverá ser substituída por uma *função trigonométrica*, técnica que chamamos de "Substituição Trigonométrica", conforme indicam as figuras abaixo:

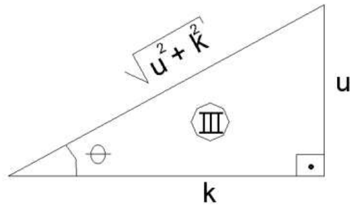
Caso I: $\boldsymbol{k^2-u^2}$




Caso II: $\boldsymbol{u^2-k^2}$




Caso III: $\boldsymbol{u^2+k^2}$



$$\begin{cases} sen\theta = \frac{u}{k} \\ \boldsymbol{u = k \cdot sen\theta} \end{cases} \qquad \begin{cases} sec\theta = \frac{u}{k} \\ \boldsymbol{u = k \cdot sec\theta} \end{cases} \qquad \begin{cases} tg\theta = \frac{u}{k} \\ \boldsymbol{u = k \cdot tg\theta} \end{cases}$$

Resumindo, em havendo:

I) $\boldsymbol{k^2 - u^2}$ substituir por $\boldsymbol{u = k \cdot sen\theta}$

II) $\boldsymbol{u^2 - k^2}$ substituir por $\boldsymbol{u = k \cdot sec\theta}$

III) $\boldsymbol{u^2 + k^2}$ substituir por $\boldsymbol{u = k \cdot tg\theta}$

Veja a aplicação da técnica:

Exemplo 1: calcular $\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+9}}$

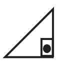
**Solução:** note que $t^2 + 9 = t^2 + 3^2$, então temos o caso III: $\boldsymbol{u^2 + k^2}$, onde: $u = t$ e $k = 3$.
A substituição será do tipo **III**: $\boldsymbol{u = k \cdot tg\theta}$

Assim, temos:

$$\begin{aligned} t &= 3\,\mathrm{tg}\,\theta \\ dt &= 3\sec^2\theta \cdot d\theta \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dt}{\sqrt{t^2+9}} = \int \frac{3\sec^2\theta \cdot d\theta}{\sqrt{9\,\mathrm{tg}^2\theta + 9}} = \int \frac{3\sec^2\theta \cdot d\theta}{\sqrt{9\,(\mathrm{tg}^2\theta + 1)}} = \int \frac{\cancel{3}\sec^2\theta \cdot d\theta}{\cancel{3}\,\sqrt{\mathrm{tg}^2\theta + 1}} =$$

$$= \int \frac{\sec^2\theta \cdot d\theta}{\sqrt{\sec^2\theta}} = \int \frac{\cancel{\sec^2}\theta \cdot d\theta}{\cancel{\sec\theta}} = \int \sec\theta \cdot d\theta \text{ que é a tabelada 20.}$$

$$\text{Então: } \int \frac{dt}{\sqrt{t^2+9}} = \int \sec\theta \cdot d\theta = \ln\left|\sec\theta + \mathrm{tg}\,\theta\right|$$

Mas, do  , temos que: $tg\theta = \frac{t}{3} \quad \Rightarrow \quad \sec\theta = \frac{\sqrt{t^2+9}}{3}$

$$\therefore \ln\left|\sec\theta + \mathrm{tg}\,\theta\right| = \ln\left|\frac{\sqrt{t^2+9}}{3} + \frac{t}{3}\right| + c$$

Então: $$\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+9}} = \ln\left|\frac{\sqrt{t^2+9}}{3}+\frac{t}{3}\right| + C$$

**Solução:**

Note que a troca de variáveis, envolvendo a função trigonométrica: $\operatorname{tg}^2\theta + 1 = \sec^2\theta$, propiciou a extração do fator do radical, bem como a simplificação da fração resultante. Essa é a proposta da técnica.

Exemplo 2:

Calcular a integral definida: $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{(5-x^2)^3}}$

**Solução:** observe que $5-x^2 = \left(\sqrt{5}\right)^2 - x^2$, portanto temos o caso I: $k^2-u^2$, onde $k=\sqrt{5}$ e $u = x$.

Neste caso, a substituição a ser feita é: $u = k\operatorname{sen}\theta$.

Assim, temos que: $x = \sqrt{5}\cdot\operatorname{sen}\theta \Rightarrow dx = \sqrt{5}\cdot\cos\theta\cdot d\theta$

$$\therefore \int \frac{dx}{\sqrt{(5-x^2)^3}} = \int \frac{\sqrt{5}\cdot\cos\theta\cdot d\theta}{\sqrt{(5-5\operatorname{sen}^2\theta)^3}} =$$

Veja que, colocando 5 em evidência para extrair o fator do radical, teremos:

$$5-5\,\text{sen}^2\,\theta=5\left(1-\text{sen}^2\,\theta\right)=5\cos^2\theta\,.$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{\left(5-x^2\right)^3}}=\int\frac{\sqrt{5}\cdot\cos\theta\cdot d\theta}{\sqrt{\left(5\cos^2\theta\right)^3}}=\int\frac{\sqrt{\cancel{5}}\,\cos\theta\cdot d\theta}{5\sqrt{\cancel{5}}\,\cos^3\theta}=\int\frac{1\cdot\cos\theta\cdot d\theta}{5\cdot\cos\theta.\cos^2\theta}=\frac{1}{5}\int\frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta=$$

$$=\frac{1}{5}\int\sec^2\theta\cdot d\theta \quad \text{que é a tabelada 24.}$$

$$\therefore\frac{1}{5}\int\sec^2\theta\cdot d\theta=\frac{1}{5}\,\text{tg}\;\theta$$

Mas, do $\triangle$ : $x=\sqrt{5}\cdot\text{sen}\,\theta \;\;\therefore\;\; \text{sen}\,\theta=\dfrac{x}{\sqrt{5}} \;\;\Rightarrow\;\; \text{tg}\;\theta=\dfrac{x}{\sqrt{5-x^2}}$

$$\therefore\int_1^2\frac{dx}{\sqrt{\left(5-x^2\right)^3}}=\frac{1}{5}\int\sec^2\theta\cdot d\theta=\frac{1}{5}\,\text{tg}\;\theta\left[\frac{1}{5}\cdot\frac{x}{\sqrt{5-x^2}}\right]_1^2=$$

$$\int_1^2\frac{dx}{\sqrt{\left(5-x^2\right)^3}}=\frac{2}{5\sqrt{5-4}}-\frac{1}{5\sqrt{5-1}}=\frac{2}{5}-\frac{1}{5\cdot 2}=\frac{3}{10}$$

$$\boxed{\int_1^2\frac{dx}{\sqrt{\left(5-x^2\right)^3}}=\frac{3}{10}}$$

**Solução:**

Exemplo 3: calcular $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-7}}$.

**Resolução:** note que $x^2-7=x^2-\left(\sqrt{7}\right)^2$, portanto temos o caso II: $u^2-k^2$, onde $k=\sqrt{7}$ e $u=x$; neste caso, a substituição a ser feita é: $u=k\sec\theta$.

Assim, temos que: $x=\sqrt{7}\cdot\sec\theta \quad\Rightarrow\quad dx=\sqrt{7}\cdot\sec\theta\cdot tg\theta\cdot d\theta$

$$\therefore\ \int\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-7}}=\int\frac{\sqrt{7}\cdot\cancel{\sec\theta}\cdot tg\theta\cdot d\theta}{7\cdot\cancel{\sec^2}\theta\cdot\sqrt{7\cdot\sec^2\theta-7}}=\int\frac{\sqrt{7}\cdot tg\theta\cdot d\theta}{7\cdot\sec\theta\cdot\sqrt{7(\sec^2\theta-1)}}=$$

Como $\sec^2\theta-1=tg^2\theta$, temos que:

$$=\int\frac{\sqrt{7}\cdot tg\theta\cdot d\theta}{7\cdot\sec\theta\cdot\sqrt{7tg^2\theta}}=\int\frac{\cancel{\sqrt{7}\cdot tg\theta}\cdot d\theta}{7\cdot\sec\theta\cdot\cancel{\sqrt{7}\cdot tg\theta}}=\frac{1}{7}\int\frac{d\theta}{\sec\theta}=\frac{1}{7}\int\cos\theta d\theta=\frac{1}{7}sen\theta+c$$

$$\therefore\ \int\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-7}}=\frac{1}{7}sen\theta+c$$

Mas, do : $x=\sqrt{7}\cdot\sec\theta \quad\Rightarrow\quad \sec\theta=\frac{x}{\sqrt{7}} \quad\Rightarrow\quad \cos\theta=\frac{\sqrt{7}}{x} \quad\Rightarrow\quad \text{sen}\theta=\frac{\sqrt{x^2-7}}{x}$

$$\therefore\ \int\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-7}}=\frac{1}{7}\cdot\frac{\sqrt{x^2-7}}{x}+c$$

**Solução:**

Exemplo 4**:** calcular $\int \frac{x \cdot dx}{9x^2 - 16}$.

**Solução:** embora a integral possa ser resolvida por substituição trigonométrica, pois $9x^2 - 16 = (3x)^2 - (4)^2$, sendo portanto do caso II: $u^2 - k^2$, esse não é o processo mais recomendável. Chamando o denominador de "$u$", temos que o numerador será "$du$", com pequeno ajuste na constante: Veja só:

$$\begin{cases} u = 9x^2 - 16 \\ du = 18xdx \end{cases} \qquad \therefore \int \frac{xdx}{9x^2 - 16} = \frac{1}{18} \int \frac{18xdx}{9x^2 - 16} = \frac{1}{18} \int \frac{du}{u} = \frac{1}{18} \ln|u| + c$$

$$\therefore \int \frac{xdx}{9x^2 - 16} = \frac{1}{18} \ln|u| + c$$

Mas, $u = 9x^2 - 16$, então: $\therefore \int \frac{xdx}{9x^2 - 16} = \frac{1}{18} \ln|u| + c = \frac{1}{18} \ln|9x^2 - 16| + c$

$$\therefore \int \frac{xdx}{9x^2 - 16} = \frac{1}{18} \ln|9x^2 - 16| + c$$

**Solução:**

Observe pelo exemplo feito que nem sempre a primeira escolha de uma técnica para resolução da integral é a mais eficaz. Como primeira tentativa, devemos usar sempre a **troca de variáveis** do tipo "$u$" desde que haja "$du$" no integrando, fazendo os ajustes com a constante quando necessário.

É interessante observar que algumas integrais envolvendo trinômios do 2º grau no denominador, tipo $ax^2 + bx + c$, podem ser resolvidas usando a técnica **Substituição Trigonométrica.** Nesses casos, devemos **fatorar** o trinômio, transformando-o em expressões do tipo: $(ax+b)^2 \pm k^2$ ou $k^2 - (ax+b)^2$; ou seja, após a fatoração, o trinômio do 2º grau pode ser conduzido para uma adição ou subtração envolvendo uma $(\text{constante})^2 \pm (\text{função})^2$, algo do tipo: $k^2 - u^2$, $k^2 + u^2$ ou $u^2 - k^2$, onde $\boldsymbol{u}$ é uma função de 1º grau. Tal procedimento é denominado *"forçar o aparecimento do trinômio quadrado perfeito",* conteúdo estudado na disciplina de Pré Cálculo. Veja só um exemplo para lembrança do conceito: $x^2 + 2x + 5 = x^2 + 2x + 1 + 4 = (x+1)^2 + 2^2$, que é algo do tipo: $u^2 + k^2$, portanto caso III. Pesquise nas referências bibliográficas e verifique não só este artificio como outros que possibilitam a resolução de integrais de modo mais amigável.

**Para saber Mais: Biblioteca SIBI Unitau**

Stewart: https://integrada.minhabiblioteca.com.br/books/9788522126859 (p. 366)

Anton: https://integrada.minhabiblioteca.com.br/books/9788582602263 (p. 366)

## 5.2 Integração por Partes

Para os casos em que o integrando apresenta um *produto entre duas funções*, no qual não conseguimos aplicar a técnica troca de variáveis do tipo "*u*" desde que haja "*du*" no integrando, é comum usarmos a técnica denominada *Integração por Partes*. Já sabemos que a derivação de um produto entre duas funções é dada pela regra:

$$\frac{d(u \cdot v)}{dx} = u \cdot \frac{dv}{dx} + v \cdot \frac{du}{dx} \quad \text{ou} \quad (u \cdot v)' = u \cdot \frac{dv}{dx} + v \cdot \frac{du}{dx}$$

Multiplicando-se ambos os membros da equação por $dx$, temos: $(u \cdot v)' \cdot dx = u \cdot dv + v \cdot du$ .

Integrando ambos os membros da equação resultante, temos: $\int (u \cdot v)' dx = \int u \cdot dv + \int v \cdot du$ .

Como $\int (u \cdot v)' dx = u \cdot v$, podemos escrever a equação acima da seguinte forma:

$$u \cdot v = \int u \cdot dv + \int v \cdot du \quad \text{ou ainda} \quad \int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$$

Em resumo: para integrar uma função "$u$" vezes a função diferencial "$dv$", de alguma função $v$, nós usamos a regra:

$$\boxed{\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du}$$

Note que separamos o integrando em duas partes, chamando uma parte de "$u$" e a outra parte de "$dv$". Determinados os "$du$" e "$v$", alimentamos a fórmula e resolvemos a integral.

Veja uma aplicação da regra:

**Caso I: aplicamos a regra e calculamos a integral.**

Calcular $\int x \cdot \operatorname{sen} 5x \cdot dx$

**Solução:** fazendo: "$x = u$" e "$sen5xdx = dv$", para facilitar a resolução, temos:

$$\begin{array}{l|l} u = x & dv = \operatorname{sen} 5x \cdot dx \\ du = dx & v = \int \operatorname{sen} 5x \cdot dx \\ & v = \frac{1}{5} \cdot (-\cos 5x) \end{array} \quad \therefore \int x \cdot \operatorname{sen} 5x \cdot dx = x \cdot \frac{1}{5}(-\cos 5x) - \int \frac{1}{5}(-\cos 5x) dx =$$

$$= -\frac{1}{5} \cdot x \cdot \cos 5x + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} \int \cos 5x \cdot 5dx = -\frac{x}{5} \cos 5x + \frac{1}{25} \operatorname{sen} 5x$$

$$\therefore \boxed{\int x \cdot \operatorname{sen} 5x \cdot dx = -\frac{x}{5} \cos 5x + \frac{1}{25} \operatorname{sen} 5x + C}$$

**Solução:**

Mais uma aplicação do caso I: calcular $\int x \cdot \ln x \cdot dx$.

**Solução:** para obter a $\int x \cdot \ln x \cdot dx$ vamos trocar a ordem dos fatores no integrando: $\int \ln x \cdot x dx$ e, desse modo, faremos: "$ln\ x = u$" e "$x \cdot dx = dv$". Para facilitar a resolução, temos:

$$\begin{array}{l|l} u = \ln x & dv = x dx \\ du = \dfrac{1}{x} dx & v = \int x dx = \dfrac{x^2}{2} \end{array}$$

Então, substituindo os valores encontrados na fórmula de integração por partes, vem: $\int \ln x \cdot x dx = \ln x \cdot \frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{dx}{x} =$

$$= \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int x dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \frac{x^2}{2} = \frac{x^2}{2} \left( \ln x - \frac{1}{2} \right) + C$$

$$\therefore \int x \cdot \ln x \cdot dx = \frac{x^2}{2} \left( \ln x - \frac{1}{2} \right) + C$$

**Solução:**

Agora, vamos ver o **Caso II: aplicamos sucessivas vezes a regra até resolvermos a integral.**

Calcular $\int x^3 senx\ dx$

$$= -x^3 \cos x + 3\int x^2 \cdot \cos x \cdot dx =$$

Aplicando novamente a técnica, fazendo agora: "$x^2 = u$" e "$cosxdx = dv$",

$$\left.\begin{array}{l} u = x^2 \\ du = 2xdx \end{array}\right| \begin{array}{l} dv = \cos x \cdot dx \\ v = \int \cos x \cdot dx \\ \therefore v = senx \end{array} \quad \Longrightarrow \quad = -x^3 \cos x + 3\int x^2 \cdot \cos x \cdot dx =$$

$$\therefore \int x^3 senx\ dx = -x^3 \cos x + 3 \cdot [x^2 \cdot senx - \int senx \cdot 2xdx] =$$

$$= -x^3 \cos x + 3x^2 senx - 6\int x \cdot senx \cdot dx =$$

Aplicando novamente a técnica, fazendo agora : "$x = u$" e "$senxdx = dv$", temos:

$$\left.\begin{array}{l} u = x \\ du = dx \end{array}\right| \begin{array}{l} dv = \cos x \cdot dx \\ v = \int senx \cdot dx \\ \therefore v = -\cos x \end{array} \quad \Longrightarrow \quad = -x^3 \cos x + 3x^2 senx - 6\int x \cdot senx \cdot dx =$$

$$= -x^3 \cos x + 3x^2 senx - 6[x \cdot (-\cos x) - \int -\cos x \cdot dx] =$$

$$= -x^3 \cos x + 3x^2 senx + 6x \cos x - 6\int \cos x \cdot dx =$$

$$= -x^3 \cos x + 3x^2 senx + 6x \cos x - 6senx + C$$

$$\therefore \boxed{\int x^3 senx\ dx = -x^3 \cos x + 3x^2 senx + 6x \cos x - 6senx + C}$$

**Solução:**

Vejamos agora o **caso III: aplicamos a regra e voltamos ao caso inicial.**

Calcular $\int e^x \cdot senx \cdot dx$.

**Solução:** fazendo: "$e^x = u$" e "$senx \cdot dx = dv$", temos:

$$\begin{array}{l|l} u = e^x & dv = senx \cdot dx \\ du = e^x \cdot dx & v = \int senx \cdot dx \qquad \Longrightarrow \\ & \therefore v = -\cos x \end{array}$$

$$\int e^x \cdot senx \cdot dx = e^x \cdot (-\cos x) - \int -\cos x \cdot e^x \cdot dx = -e^x \cos x + \int e^x \cdot \cos x \cdot dx$$

Aplicando novamente a regra, e fazendo "$\boldsymbol{e^x = u}$" e "$\boldsymbol{cosx \cdot dx = dv}$", teremos:

$$\begin{array}{l|l} u = e^x & dv = \cos x \cdot dx \\ du = e^x \cdot dx & v = \int \cos x \cdot dx \qquad \Longrightarrow \\ & \therefore v = senx \end{array}$$

$$\int e^x \cdot senx \cdot dx = -e^x \cos x + [e^x \cdot senx - \int senx \cdot e^x dx]$$

$$\int e^x \cdot senx \cdot dx = -e^x \cos x + e^x \cdot senx - \int senx \cdot e^x dx$$

$$\int e^x \cdot senx \cdot dx + \int senx \cdot e^x dx = -e^x \cos x + e^x \cdot senx$$

$$2\int e^x \cdot senx \cdot dx = -e^x \cos x + e^x \cdot senx$$

$$\therefore \quad \int e^x \cdot senx \cdot dx = \frac{e^x}{2}(senx - \cos x) + C$$

**Solução:**

É importante notar que temos três possibilidades quando aplicamos a técnica integração por partes: Caso I, quando aplicamos a fórmula e resolvemos a integral; Caso II, quando aplicamos sucessivas vezes para a resolução do problema; Caso III, aquele em que, aplicamos a fórmula e caímos no problema inicial, sendo que neste caso agrupamos os termos semelhantes no primeiro membro para encontrar a resolução da integral proposta.

Para facilitar o cálculo de integrais usando a técnica de integração por partes, é útil conhecer o Algoritmo de Integração por Partes, cuja vantagem no uso é oferecer um facilitador para o processo algébrico, bem como proporcionar maior agilidade na resolução da integral a ser calculada. Veja o vídeo que orienta sobre o uso do algoritmo, e calcule as integrais: $\int x^3 senx\, dx$ e $\int e^x \cdot senx \cdot dx$

## 5.3 Integração por Frações Parciais

A resolução de integrais que envolvem a divisão de funções polinomiais, sendo impossível o uso da técnica troca de variáveis "*u*" e "*du*", geralmente é feita usando-se a técnica denominada "Frações Parciais". Elas são aplicadas no caso de integrais do tipo: $\int \frac{N(x)}{D(x)} \cdot dx$, em que o numerador $N(x)$ e o denominador $D(x)$ são polinômios.

Para facilitar o estudo, dividiremos tais integrais em dois "Tipos".

**Tipo I:** $grau\ \boldsymbol{N(x)} \geq grau\ \boldsymbol{D(x)} \Longrightarrow$ **Saída:** $\boldsymbol{dividir\ N(x)\ por\ D(x)}$

Calcular $\int \frac{4x^3 - 6x^2 + 4x - 3}{x^2+1}\, dx$.

**Solução:** note que *N(x)* é de grau 3, e que *D(x)* é de grau 2. Assim, efetuando a divisão entre os polinômios e usando o método da chave, iniciamos a resolução do problema.

$$
\begin{array}{rrrr|l}
4x^3 & -6x^2 & +4x & -3 & x^2+1 \\ \cline{5-5}
-4x^3 & & -4x & & 4x-6 \\ \cline{1-4}
& -6x^2 & & -3 & \\ \cline{1-4}
& +6x^2 & & +6 & \\
& & & +3 &
\end{array}
$$

Portanto, temos que: $\frac{4x^3 - 6x^2 + 4x - 3}{x^2+1} = 4x - 6 + \frac{3}{x^2+1}$

Ou seja, descobrimos quais as frações que somadas geraram a fração do integrando. Assim, podemos escrever que:

$$\int \frac{4x^3 - 6x^2 + 4x - 3}{x^2+1}\, dx = \int \left(4x - 6 + \frac{3}{x^2+1}\right) dx =$$

$= \int 4x dx - \int 6dx + \int \frac{3}{x^2+1} dx$ que resolvida resulta em: $2x^2 - 6x + 3arctg\ x + c$

$$\therefore \int \frac{4x^3 - 6x^2 + 4x - 3}{x^2+1}\, dx = 2x^2 - 6x + 3arctg\ x + c$$

**Note que:** $\int \frac{3}{x^2+1} dx = 3\int \frac{dx}{x^2+1}$, que é a tabelada: $\int \frac{du}{u^2+a^2} = \frac{1}{a}$ arc tg $\frac{u}{a} + C$

Mais uma aplicação da técnica:

Calcular $\int \dfrac{t^6 - 16t^4 + 3t}{t^2 - 16}\, dt$.

**Solução:** efetuando a divisão entre os polinômios:

$$
\begin{array}{r|l}
t^6 - 16t^4 + 3t & t^2 - 16 \\
\cline{2-2}
-t^6 + 16t^4 & t^4 + \dfrac{3t}{t^2 - 16} \\
\cline{1-1}
+3t & \\
-3t & \\
\cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

Portanto, temos que: $\dfrac{t^6 - 16t^4 + 3t}{t^2 - 16} = t^4 + \dfrac{3t}{t^2 - 16}$. Assim, reescrevemos a integral dada como:

$$\int \frac{t^6 - 16t^4 + 3t}{t^2 - 16}\, dt = \int \left( t^4 + \frac{3t}{t^2 - 16} \right) dt =$$

$$= \int t^4 dt + \int \frac{3t}{t^2 - 16} dt = \frac{t^5}{5} + \frac{3}{2} \ln\left|t^2 - 16\right| + c$$

$$\therefore \int \frac{t^6 - 16t^4 + 3t}{t^2 - 16}\, dt = \frac{t^5}{5} + \frac{3}{2} \ln\left|t^2 - 16\right| + c$$

**Solução:**

**Note que:** a integral $\int \dfrac{3t}{t^2 - 16}\, dt$ pode ser resolvida por troca de variáveis e, na sequência, aplicando a tabelada 5, $\int \dfrac{du}{u}$, sendo: $u = t^2 - 16$ com $du = 2t \cdot dt$.

**Tipo II:** $grau\ \boldsymbol{N(x)} < grau\ \boldsymbol{D(x)} \Longrightarrow$ **saída:** $\boldsymbol{fatorar\ D(x)}$

Quando o grau do polinômio numerador N($x$) é menor do que o grau do polinômio denominador D($x$), classificaremos a integral como tipo II e **existem quatro casos** a serem considerados. São eles:

**Caso 1: o denominador é favorável em fatores distintos de 1º grau.**

$$\text{Isto é: } \frac{N(x)}{D(x)} = \frac{N(x)}{(x-a)\cdot(x-b)...}$$

Neste caso, procuramos obter uma soma de frações parciais que seja equivalente a $N(x) \div D(x)$, isto é, procura-se obter o valor para as constantes $A$, $B$, $C$,..., onde:

$$\frac{N(x)}{D(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c} + ...$$

Aplicação do caso 1: calcular $\int \frac{4x-2}{x^3-x^2-2x}\,dx$.

**Solução:** fatorando o denominador, temos que: $x^3-x^2-2x = x\cdot\left(x^2-x-2\right)$.

Como $x^2-x-2$ é um trinômio do 2º grau, continuando a fatoração, obteremos:

$$x^3-x^2-2x = x\left(x^2-x-2\right) = x\left(x+1\right)\cdot\left(x-2\right)$$

Assim, a fração do integrando poderá ser escrita como:

$$\frac{4x-2}{x^3-x^2-2x} = \frac{4x-2}{x\left(x+1\right)\left(x-2\right)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-2}$$

Portanto, devemos procurar quais os valores de $A$, $B$ e $C$ que tornam a sentença verdadeira.

$$\frac{4x-2}{x^3-x^2-2x}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x-2}$$

Tirando o mmc entre os denominadores das frações do segundo membro para que possamos efetuar a soma e depois comparar a fração obtida com a do primeiro membro, temos: mmc = $x\cdot(x+1)\cdot(x-2)$. Dividindo o mmc pelo denominador e multiplicando pelo numerador, obtemos:

$$\frac{4x-2}{x^3-x^2-2x}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x-2}=\frac{A(x+1)(x-2)+Bx(x-2)+Cx(x+1)}{x(x+1)(x-2)}$$

Como os denominadores são iguais, para que as frações resultem na igualdade desejada, basta que os numeradores sejam iguais. Desse modo, podemos escrever que:

$4x-2=A(x+1)(x-2)+Bx(x-2)+Cx(x+1)$, que chamaremos de *equação de trabalho*, pois será ela que fornecerá os valores $A$, $B$ e $C$ que tornam a sentença verdadeira.

Para achar os valores de $A$, $B$ e $C$, entramos na equação de trabalho com as *raízes dos denominadores das frações* parciais. Assim:

**Se $x = 0$** $\Longrightarrow -2=A(1)(-2)+B(0)(-2)+C(0)(1) \qquad \therefore\ A=1$

**Se $x = -1$** $\Longrightarrow -6=A(0)(-3)+B(-1)(-3)+C(-1)(0) \qquad \therefore\ C=1$

**Se $x = 2$** $\Longrightarrow 6=A(3)(0)+B(2)(0)+C(2)(3) \qquad \therefore\ B=-2$

Desse modo, a fração dada pode ser escrita como:

$$\frac{4x-2}{x^3-x^2-2x}=\frac{1}{x}+\frac{-2}{x+1}+\frac{1}{x-2}$$

Assim, voltando ao problema inicial, temos que:

$$\int \frac{4x-2}{x^3-x^2-2x}dx = \int\left(\frac{1}{x}-\frac{2}{x+1}+\frac{1}{x-2}\right)dx =$$

$$= \int \frac{dx}{x} - 2\int \frac{dx}{x+1} + \int \frac{dx}{x-2} =$$

$$= \ln|x| - 2\ln|x+1| + \ln|x-2| + c = \ln\left|\frac{x(x-2)}{(x+1)^2}\right| + c$$

$$\therefore \quad \boxed{\int \frac{4x-2}{x^3-x^2-2x}dx = \ln\left|\frac{x(x-2)}{(x+1)^2}\right| + c}$$

**Solução:**

**Note que:** as integrais do tipo $\int \frac{dx}{x+k}$ podem ser resolvidas por troca de variáveis, usando a tabelada $\int \frac{du}{u} = \ln u + c$ .

**Caso 2: o denominador, fatorado, apresenta fatores de 1º grau repetidos.**

Neste caso, o denominador, após a fatoração, apresentará repetição de fatores de 1º grau, ou seja:

$$\frac{N(x)}{D(x)} \text{ é do tipo: } \frac{N(x)}{D(x)} = \frac{N(x)}{(x-a)\cdot(x-b)^3\ldots}$$

Note que: $(x-b)^3=(x-b)\cdot(x-b)\cdot(x-b)$, portanto repete-se o fator $(x-b)$ três vezes. Assim, a fração do integrando pode ser escrita como:

$$\frac{N(x)}{D(x)}=\frac{A}{(x-a)}+\frac{B}{(x-b)}+\frac{C}{(x-b)^2}+\frac{D}{(x-b)^3}\dots$$

É importante notar que o mmc $(x-b)\cdot(x-b)^2\cdot(x-b)^3$ é igual a $(x-b)^3$.

Aplicação do caso 2: calcular $\int\frac{6x\cdot dx}{x^3-2x^2-4x+8}$.

**Solução:** fatorando o denominador, temos:

$$\begin{aligned}&x^3-2x^2-4x+8=\\&=x^2(x-2)-4(x-2)=\\&=(x^2-4)\cdot(x-2)=\\&=(x+2)\cdot(x-2)\cdot(x-2)=\\&=(x+2)\cdot(x-2)^2\end{aligned}$$

Assim, a fração do integrando pode ser escrita como:

$$\frac{6x}{x^3-2x^2-4x+8}=\frac{6x}{(x+2)\cdot(x-2)^2}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{(x-2)^2}$$

Como o mmc entre os polinômios dos denominadores é $(x+2)\cdot(x-2)^2$, dividindo pelo denominador e multiplicando pelo numerador de cada uma das frações, teremos:

$$\frac{6x}{(x+2)\cdot(x-2)^2}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{(x-2)^2}$$

Portando, para que a igualdade seja verdadeira, basta que sejam iguais os numeradores, visto que os denominadores são os mesmos, somente escritos de forma diferente. Desse modo, obtemos a nossa equação de trabalho, aquela que, resolvida, fornecerá os valores de $A$, $B$ e $C$:

$$6x = A(x-2)^2 + B(x+2)(x-2) + C(x+2)$$

Para obtermos as constantes $A$, $B$ e $C$, atribuímos valores a $x$ tais que estes sejam as raízes dos denominadores das frações do 2º membro. Assim, temos que:

**Se $x = 2$** $\Longrightarrow 12 = A(0) + B(4)(0) + C(4) \qquad \therefore\ C = 3$

**Se $x = 2$** $\Longrightarrow -12 = A\cdot(-4)^2 + B(0)(-4) + C(0) \qquad \therefore\ A = \frac{-3}{4}$

Como nenhum outro valor de $x$ anula os denominadores, entramos com $x = 0$ na equação de trabalho, bem como com os valores já encontrados de $A$ e $C$ para o cálculo da constante $B$:

**Se $x = 0$** $\Longrightarrow 0 = A\cdot(-2)^2 + B(2)(-2) + C(2)$, como $C = 3$ e $A = -\frac{3}{4}$, temos:

$$0 = \left(\frac{-3}{4}\right)(4) + B(-4) + (3).2 \qquad \therefore\ B = \frac{3}{4}$$

$$0 = -3 - 4B + 6$$

Assim, podemos escrever que: $\frac{6x}{x^3 - 2x^2 - 4x + 8} = \frac{-\frac{3}{4}}{x+2} + \frac{\frac{3}{4}}{x-2} + \frac{3}{(x-2)^2}$, ou seja, a integral

dada será reescrita como: $\int \frac{6x dx}{x^3 - 2x^2 - 4x + 8} = \int \left( \frac{-\frac{3}{4}}{x+2} + \frac{\frac{3}{4}}{x-2} + \frac{3}{(x-2)^2} \right) dx =$

$$= \int \frac{dx}{x+2} + \frac{3}{4}\int \frac{dx}{x-2} + 3\int \frac{dx}{(x-2)^2} = \frac{-3}{4}\ln|x+2| + \frac{3}{4}\ln|x-2| + \frac{-3}{x-2} + C$$

$$\int \frac{6x\,dx}{x^3 - 2x^2 - 4x + 8} = \frac{-3}{4}\ln|x+2| + \frac{3}{4}\ln|x-2| - \frac{3}{x-2} + C$$

**Solução:**

**Nota:** a integral $\int \frac{dx}{(x-2)^2}$ pode ser resolvida por troca de variáveis, usando a tabelada 5, $\int \frac{du}{u} = \ln u + c$, fazendo: $u = x - 2$, com $dx = du$.

## Caso 3: o denominador apresenta fatores de 2º grau não fatoráveis e sem repetição

Neste caso, ao fatorarmos o denominador da fração do integrando, obteremos fatores de segundo grau que não são fatoráveis em fatores de 1º grau, ou seja, o polinômio de segundo grau não apresenta raízes reais, e também não apresentam repetição, ou seja:

$$\frac{N(x)}{D(x)} = \frac{N(x)}{(x-a)\cdot(x^2+bx+c)\cdot(x^2+dx+e)\ldots}$$

Neste caso, a abertura em frações parciais será dada por:

$$\frac{N(x)}{D(x)} = \frac{Ax+B}{x^2+bx+c} + \frac{Cx+D}{x^2+dx+e} + \frac{E}{x-a} + \ldots$$

Você pode estar se perguntando sobre o que aconteceria se aparecesse um termo de 3º ou 4º grau no denominador. A resposta é: existe um teorema que afirma que qualquer polinômio com coeficientes reais pode ser escrito como um produto de fatores de 1º grau ou de 2º grau; sendo assim, se ocorrer um polinômio de 4º grau, ele deverá ser fatorado em 4 termos de 1º grau, ou em 2 termos de 2º grau, ou ainda em 2 termos de 1º grau e 2 de 2º grau.

Aplicação do caso 3: calcular $\int \frac{x^2 \cdot dx}{81 - x^4}$.

**Solução:** como o denominador apresenta uma diferença de dois quadrados, a fatoração será dada por: $81 - x^4 = (9)^2 - (x^2)^2 = (9 - x^2) \cdot (9 + x^2) = (3 - x) \cdot (3 + x) \cdot (9 + x^2)$. Observe que o termo $(9 + x^2)$ não se fatora, pois não apresenta raízes reais. Assim, a fração do integrando será aberta em frações parciais como:

$$\frac{x^2}{81 - x^4} = \frac{A}{3 - x} + \frac{B}{3 + x} + \frac{Mx + N}{9 + x^2}$$

Como o mmc entre os denominadores das frações do segundo membro é $(3 - x)(3 + x)(9 + x^2)$ dividindo o denominador de cada uma delas pelo mmc e multiplicando pelo numerador, teremos:

$$\frac{x^2}{81 - x^4} = \frac{A(3 + x)(9 + x^2) + B(3 - x)(9 + x^2) + (Mx + N)(3 - x)(3 + x)}{(3 - x)(3 + x)(9 + x^2)}$$

Para que a sentença seja verdadeira, basta compararmos os numeradores, pois os denominadores já sabemos que são iguais. Assim, obteremos a nossa equação de trabalho, que fornecerá os valores das constantes procuradas para que possamos gerar as frações parciais, aquelas que, somadas, geram a fração dada.

$$x^2 = A(3 + x)(9 + x^2) + B(3 - x)(9 + x^2) + (Mx + N)(3 - x)(3 + x)$$

Atribuindo valores para $x$, de modo que zerem os denominadores, temos:

**Se $x = 3$** $\Longrightarrow 9 = A \cdot 6 \cdot 18 + B \cdot 0 + 0 \qquad \therefore\ A = \dfrac{1}{12}$

**Se $x = -3$** $\Longrightarrow x = -3 \Rightarrow 9 = A \cdot 0 + B \cdot 6 \cdot 18 + 0 \qquad \therefore\ B = \dfrac{1}{12}$

Como não temos valores reais que anulem $(9 + x^2)$, temos que atribuir valores simétricos a $x$, de modo a cair em um sistema de duas equações e duas incógnitas para determinar as constantes $C$ e $D$. Veja só:

**Se $x = 1$** $\Longrightarrow 1 = \dfrac{1}{12} \cdot 4 \cdot 10 + \dfrac{1}{12} \cdot 2 \cdot 10 + (M + N) \cdot 2 \cdot 4 \quad \therefore 1 = \dfrac{1}{12} \cdot 40 + \dfrac{1}{12} \cdot 20 + 8 \cdot (M + N)$

$$\Rightarrow 8M + 8N = -4 \quad \textbf{(I)}$$

**Se $x = -1$** $\Longrightarrow 1 = \dfrac{1}{12} \cdot 2 \cdot 10 + \dfrac{1}{12} \cdot 4 \cdot 10 + (-M + N) \cdot 4 \cdot 2 \quad \therefore\ 1 = \dfrac{1}{12} \cdot 20 + \dfrac{1}{12} \cdot 40 + 8(-M + N)$

$$\Rightarrow -8M + 8N = -4 \quad \textbf{(II)}$$

Fazendo **(I) + (II)**, temos: $16N = -8 \quad \therefore N = -\dfrac{1}{2}$

Substituindo $N = -\dfrac{1}{2}$ em **(I)**, temos: $8M + 8\left(\dfrac{-1}{2}\right) = -4 \ \therefore\ M = 0$

Assim, a integral será escrita como: $\displaystyle\int \frac{x^2 \cdot dx}{81 - x^4} = \int \left[ \frac{\frac{1}{12}}{3 - x} + \frac{\frac{1}{12}}{3 + x} + \frac{0x - \frac{1}{2}}{9 + x^2} \right] dx$

$$\therefore \int \frac{x^2 \cdot dx}{81 - x^4} = -\frac{1}{12} \int \frac{-dx}{3 - x} + \frac{1}{12} \int \frac{dx}{3 + x} - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{9 + x^2}$$

$$\boxed{\int \frac{x^2 \cdot dx}{81 - x^4} = -\frac{1}{12} \ln|3 - x| + \frac{1}{12} \ln|3 + x| - \frac{1}{6} \cdot arctg\ \frac{x}{3} + C}$$

**Solução:**

**Caso 4: o denominador apresenta fatores de 2º grau não fatoráveis com repetição.**

Neste caso, ao fatorarmos o denominador da fração do integrando, obteremos fatores de segundo grau que não são fatoráveis em fatores de 1º grau; ou seja, os polinômios de segundo grau não apresentam raízes reais, e apresentam repetição, ou seja:

$$\frac{N(x)}{D(x)} = \frac{N(x)}{(x-a)\cdot(x^2+bx+c)^3\ldots}$$

Neste caso, a abertura em frações parciais será dada por:

$$\frac{N(x)}{D(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{Mx+N}{x^2+bx+c} + \frac{Tx+P}{(x^2+bx+c)^2} + \frac{Rx+S}{(x^2+bx+c)^3} + \ldots$$

Aplicação do caso 4: calcular $\int \frac{x^3+3x^2+5x+7}{(x^2+2x+3)^2} \cdot dx$ .

**Solução:** como o denominador apresenta fatores do 2º grau **com repetição**, a abertura em frações parciais será dada por:

$$\frac{x^3+3x^2+5x+7}{(x^2+2x+3)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+2x+3} + \frac{Cx+D}{(x^2+2x+3)^2}$$

O mmc entre as frações do denominador será $(x^2+2x+3)^2$. Dividindo os denominadores do segundo membro da equação pelo mmc e multiplicando pelos respectivos numeradores, obteremos a equação:

$$\frac{x^3+3x^2+5x+7}{(x^2+2x+3)^2}=\frac{(Ax+B)(x^2+2x+3)+Cx+D}{(x^2+2x+3)^2}$$

Para que a igualdade seja verdadeira, basta igualarmos os numeradores, pois o denominadores são iguais, obtendo assim a equação de trabalho, que fornecerá os valores das constantes $A$, $B$, $C$ e $D$.

$$\therefore\ x^3+3x^2+5x+7=(Ax+B)(x^2+2x+3)+Cx+D$$

Efetuando o produto no segundo membro, agrupando os termos semelhantes e comparando termo a termo o polinômio do segundo membro com o polinômio do primeiro membro, temos:

$$x^3+3x^2+5x+7=Ax^3+2Ax^2+3Ax+Bx^2+2Bx+3B+Cx+D$$

$$\therefore\ x^3+3x^2+5x+7=(A)x^3+(2A+B)x^2+(3A+2B+C)x+3B+D$$

A comparação entre os respectivos termos dos polinômios resulta em:

$$A=1;\ 2A+B=3\quad\Rightarrow B=1;\ 3A+2B+C=5\quad\Rightarrow C=0 \text{ e } 3B+D=7\quad\Rightarrow D=4$$

Assim, temos que: $\displaystyle\int\frac{x^3+3x^2+5x+7}{(x^2+2x+3)^2}\cdot dx=\int\frac{x+1}{x^2+2x+3}\,dx+\int\frac{4}{(x^2+2x+3)^2}\,dx$

Resolvendo separadamente as integrais, temos que a primeira $\displaystyle\int\frac{x+1}{x^2+2x+3}\,dx$ será resolvida por troca de variáveis:

sendo: $\begin{cases} u=x^2+2x+3 \\ du=(2x+2)dx \\ du=2(x+1)dx \end{cases}$, e usando a tabelada: $\displaystyle\int\frac{du}{u}$

**(I)** $\int \frac{x+1}{x^2+2x+3}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2(x+1)}{x^2+2x+3}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{2}\ln|u| = \frac{1}{2}\ln|x^2+2x+3| + c$

Já na segunda $\int \frac{4\cdot dx}{(x^2+2x+3)^2}$, teremos que aplicar a substituição trigonométrica, forçando o aparecimento do trinômio quadrado perfeito no denominador.

**(II)** $\int \frac{4\cdot dx}{(x^2+2x+3)^2} = 4\int \frac{dx}{(x^2+2x+1+2)^2} = 4\int \frac{dx}{[(x^2+2x+1)+2]^2} = 4\int \frac{dx}{[(x+1)^2+(\sqrt{2})^2]^2} =$

$$= 4\int \frac{du}{[u^2+k^2]^2}$$

Usando substituição trigonométrica para o tipo $u^2+k^2$, cuja saída é $u = k\ tg\theta$, teremos:

$$\begin{cases} u^2 = (x+1)^2 \\ u = x+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k^2 = (\sqrt{2})^2 \\ k = \sqrt{2} \end{cases} \therefore\ u = k\ tg\theta \Rightarrow \begin{cases} x+1 = \sqrt{2}\cdot tg\theta \\ dx = \sqrt{2}\cdot \sec^2\theta d\theta \end{cases}$$

$$\therefore 4\int \frac{dx}{[(x+1)^2+(\sqrt{2})^2]^2} = 4\int \frac{\sqrt{2}\ \sec^2\theta\ d\theta}{[(\sqrt{2}\ tg\theta)^2+(\sqrt{2})^2]^2} =$$

$$= 4\int \frac{\sqrt{2}\ \sec^2\theta\ d\theta}{[2\ tg^2\theta+2]^2} = 4\int \frac{\sqrt{2}\ \sec^2\theta\ d\theta}{[2\ (tg^2\theta+1)]^2} =$$

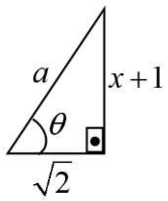
$$= 4\int \frac{\sqrt{2}\ \sec^2\theta\ d\theta}{[2\ \sec^2\theta)]^2} = \cancel{4}\int \frac{\sqrt{2}\ \cancel{\sec^2}\theta\ d\theta}{\cancel{4}\ \cancel{\sec^4}\theta} =$$

$$= \sqrt{2}\int \frac{1}{\sec^2\theta}\,d\theta = = \sqrt{2}\int \cos^2\theta\ d\theta$$

Que é a tabelada 17: $\int \cos^2 u.du = \frac{1}{2}\left(u + senu.\cos u\right) + C$

$$\therefore \sqrt{2}\int \cos^2\theta\ d\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\theta + sen\theta.\cos\theta\right)$$

Mas: $x+1 = \sqrt{2}\ tg\theta$, então: $tg\theta = \frac{x+1}{\sqrt{2}}$




Do triângulo vem:

$$a^2=(x+1)^2+(\sqrt{2})^2$$
$$a=\sqrt{(x+1)^2+(\sqrt{2})^2} \quad \text{então, temos que:}$$
$$a=\sqrt{x^2+2x+3}$$

$$sen\theta=\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+3}} \;;\; \cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+2x+3}} \;;\; \theta=arc\ sen\ \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+3}}$$

$$\therefore \frac{\sqrt{2}}{2}(\theta+sen\theta.\cos\theta)==\frac{\sqrt{2}}{2}\left(arcsen\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+3}}+\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+3}}.\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+2x+3}}\right)=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}arcsen\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+3}}+\frac{x+1}{x^2+2x+3}$$

Assim, temos que:

$$\int\frac{x^3+3x^2+5x+7}{(x^2+2x+3)^2}\cdot dx=\frac{1}{2}\ln|x^2+2x+3|+\frac{\sqrt{2}}{2}arcsen\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+3}}+\frac{x+1}{x^2+2x+3}+C$$

## 5.4 Sintese da Unidade

Nesta Unidade, estudamos as técnicas de integração. A básica, chamada de troca de variáveis, é aplicada a qualquer tipo de função no integrando, desde que, ao chamar uma das funções do integrando de “u”, tenhamos sua derivada “du”. Vimos também as técnicas: Integração por Partes, usada geralmente quando ocorre um produto de funções no integrando e, fechando a Unidade, Frações Parciais, usada quando o integrando apresenta uma divisão envolvendo polinômios. Isto posto, podemos concluir que o objetivo principal dessa Unidade é a apreensão das *técnicas de integração*, procedimentos algébricos específicos para a resolução de determinadas integrais que não se resolvem por simples troca de variáveis. É interessante notar que a técnica troca de variáveis sempre será usada para que caiamos em uma das integrais tabeladas ou conhecidas. Portanto, é muito importante o conhecimento da tabela básica de integrais, pois, desse conhecimento depende o algebrismo necessário para a resolução dos problemas propostos. Ressalto novamente a importância do estudo constante que nos fornece a prática necessária para, com certa tranquilidade, encontrarmos o caminho a ser trilhado para a resolução da integral.

## 5.5 Para Saber Mais Biblioteca Pearson/Sibi Unitau

**SIBI – Unitau:**

Stewart: https://integrada.minhabiblioteca.com.br/books/9788522126859

Hoffmann: https://integrada.minhabiblioteca.com.br/books/978-85-216-2909-2

Ayres: https://integrada.minhabiblioteca.com.br/books/9788565837446

Anton: https://integrada.minhabiblioteca.com.br/books/9788582602263

**Biblioteca Pearson:**


BASSANEZI, R. C. **Introdução ao cálculo e aplicações.** São Paulo: Contexto, 2015. Disponível em: https://plataforma.bvirtual.com.br/Acervo/Publicacao/31203. Acesso em: 02 jul. 2021.

CASTANHEIRA, N. P.; LEITE, A. E. **Tópicos de Cálculo I:** limites, derivadas e integrais. Curitiba: InterSaberes, 2017. Disponível em: https://plataforma.bvirtual.com.br/Acervo/Publicacao/49388. Acesso em: 02 jul. 2021.

FACCIN, G. M. **Elementos de cálculo diferencial e integral.** Curitiba: InterSaberes, 2015. Disponível em: https://plataforma.bvirtual.com.br/Acervo/Publicacao/30379. Acesso em: 02 jul. 2021.

FERNANDES, D. B. (Org.). **Cálculo diferencial.** São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2014. Disponível em: https://plataforma.bvirtual.com.br/Acervo/Publicacao/22092. Acesso em: 02 jul. 2021.

FLEMMING, D. M.; GONÇALVES, M. B. **Cálculo A:** funções, limite, derivação, integração. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2006. Disponível em: https://plataforma.bvirtual.com.br/Acervo/Publicacao/748. Acesso em: 02 jul. 2021.

THOMAS, G. B. et al. **Cálculo.** v.1. 12. ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2012. Disponível em: https://plataforma.bvirtual.com.br/Acervo/Publicacao/3376. Acesso em: 02 jul. 2021.

### Aplicativos Gráficos

Geogebra: https://www.geogebra.org

Graphmatica: http://www.graphmatica.com/

*Microsoft* Mathematics: https://microsoft-mathematics.br.uptodown.com/windows

### Vídeo Khan Academy

https://pt.khanacademy.org/math/calculus-home/integration-techniques-calc

## 5.6 Atividade Aprendendo

Resolver as integrais usando a técnica mais adequada:

**1.** $\int t^3 \cdot sent \cdot dt$

**Solução:**

**2.** $\int (2x+1) \cdot senx \cdot dx$

**Solução:**

**3.** $\int e^{t} \cdot sent \cdot dt$

**Solução:**

**4.** $\int x^{3} \cdot e^{2x^{4}} \cdot dx$

**Solução:**

**5.** $\int x \cdot \text{sen}\, 5x^{2} \cdot dx$

**Solução:**

**6.** $\int e^{senx} \cdot \cos x \cdot dx$

**Solução:**

**7.** $\int \frac{dt}{t^2\sqrt{16-t^2}}$

**Solução:**

**8.** $\int_2^3 \frac{4 \cdot dx}{x\sqrt{x^2-1}}$

**Solução:**

**9.** $\int \frac{x^4-2x^2+4x+1}{x^3-x^2-x+1}dx$

**Solução:**

**10.** $\int \frac{3x^2+1}{x^3-6x^2+x-6}\,dx$

**Solução:**

## 5.7 Atividade Praticando

Resolver as integrais usando a técnica mais adequada:

**1.** $\int \frac{dx}{\sqrt{1-7x^2}}$ **2.** $\int_4^6 \frac{-2x^2+14x-20}{-x+3}\,dx$ **3.** $\int x^3 senx\; dx$ **4.** $\int x^2.e^x.dx$

**5.** $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^3-4}}$ **6.** $\int \frac{dx}{x^2\cdot\sqrt{x^2+4}}$ **7.** $\int \frac{4x-10}{x^2-5x+4}\cdot dx$ **8.** $\int \frac{x^4-x^3-x-1}{x^3-x^2}\cdot dx$

**Solução:**

UNITAU digital

ISBN: 978-65-86914-48-1

9 786586 914481